

中国科学技术大学2025秋数学分析B1期中考试参考答案

一、(每小题6分, 共48分)计算下列各题.

(1) 用极限定义计算 $\lim_{x \rightarrow 1} x^2$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{1, \frac{1}{3}\varepsilon\}$, 则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, $|x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1| < 3\delta \leq \varepsilon$. 故 $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$.

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^n$.

解: 原式 $= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})} = e^2$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$.

解: $(5^n)^{\frac{1}{n}} < (2^n + 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} < (3 \cdot 5^n)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} = 5$.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))^2 - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{3}$.

(5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^x(\ln x + 1)}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x \cdot \frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2 \cdot x^x}{\frac{1}{x^2}} = 2$.

(6) 求参数曲线 $\begin{cases} x = t^2 \\ y = 2t^3 \end{cases}$ 上点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 处切线的直角坐标方程.

解: 点 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 对应参数 $t = \frac{1}{2}$, 切线斜率为 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{(2t^3)'}{(t^2)'} \Big|_{t=\frac{1}{2}} = 3t \Big|_{t=\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$. 故切线方程为 $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$.

(7) 求 $(x^2 e^x)^{(20)}$.

解: 原式 $= C_{20}^0 x^2 \cdot (e^x)^{(20)} + C_{20}^1 (x^2)^{(1)} \cdot (e^x)^{(19)} + C_{20}^2 (x^2)^{(2)} \cdot (e^x)^{(18)} = e^x (x^2 + 40x + 380)$.

(8) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + \ln(1 + \sin x), & x \leq 0 \\ 2 \arctan(e^x), & x > 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

解: 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$; 当 $x = 0$ 时, $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x} = 1$; $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}}{x} = 1$, 故 $f'(0) = 1$. 综上, $f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{1 + \sin x}, & x \leq 0 \\ \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}, & x > 0 \end{cases}$.

注: 解法不唯一; 若计算思路正确结果错误, 建议酌情给分.

二、(8分) 求 $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$ 的带Peano余项的7阶Maclaurin公式, 并求 $f^{(7)}(0)$.

解: $x \rightarrow 0$ 时, $\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9)$,

$$f(x) = (x^3)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right)^{\frac{1}{3}} = x \cdot \left(1 - \frac{x^6}{18} + o(x^6)\right) = x - \frac{x^7}{18} + o(x^7). \quad (6分)$$

$$f^{(7)}(0) = 7! \cdot \left(-\frac{1}{18}\right) = -280. \quad (8分)$$

三、(8分) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$.

(1) 确定 a, b , 使得 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导;

(2) 当 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导时, 分析其导函数的连续性, 如有间断点指明其类型.

解: (1) 由于 $f(x)$ 在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时均为初等函数, 都是可导的, 故只需讨论 $x = 0$ 处的可导性. 由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续得 $f(0) = b = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$; (2分)

$$\text{再由 } f(x) \text{ 在 } x = 0 \text{ 处可导知 } f'_+(0) = f'_-(0), \text{ 即}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

故当 $a = 0, b = 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导. (4分)

$$(2) \text{ 由(1)知 } f'(0) = 0, \text{ 故 } f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}. \quad (6分)$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ 不存在, 故 $x = 0$ 是 $f'(x)$ 的第二类间断点, $f'(x)$ 在其它点处连续. (8分)

四、(10分) 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ($x \in [-2, 2]$).

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间、凹凸区间;

(2) 求 $f(x)$ 的最值.

解: (1) $f'(x) = 6x(x - 1)$, 故 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 和 $[1, 2]$ 上单调递增, 在 $[0, 1]$ 上单调递减. (3分)

又 $f''(x) = 6(2x - 1)$, 故 $f(x)$ 在 $[-2, \frac{1}{2}]$ 上凹, 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上凸. (6分)

(2) 由(1)中分析知 $x = 0$ 为极大值点, $x = 1$ 为极小值点; 最值在 $\{f(-2) = -28, f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 4\}$ 中取到, 故函数最大值为4, 最小值为-28. (10分)

五、(8分) 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, $(-1, 1)$ 内可导, 且 $f(-1) = f(1)$. 证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得 $\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

证明: 令 $F(x) = f(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$, 则 $F(-1) = F(1)$. (4分)

由Rolle中值定理, 存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$, 代入即得 $\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$. (8分)

六、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, $f(0) = f(1) = 0$ 且 $f(x)$ 不恒为 0.

记 $M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

(1) 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq 2M$;

(2) 进一步证明, 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $|f'(\eta)| > 2M$.

证明: (1) 由闭区间上连续函数最值定理知存在 $x_0 \in [0, 1]$ 使得 $M = |f(x_0)|$, 且由 $f(x)$ 不恒为 0 知 $x_0 \neq 0, 1$. 由中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$ 和 $\xi_2 \in (x_0, 1)$ 使得

$$\begin{cases} M = |f(x_0) - f(0)| = |f'(\xi_1)|x_0 \\ M = |f(x_0) - f(1)| = |f'(\xi_2)|(1 - x_0) \end{cases}. \quad (3分)$$

于是 $|f'(\xi_1)| = \frac{M}{x_0}$, $|f'(\xi_2)| = \frac{M}{1-x_0}$. 由 $\max_{0 \leq x_0 \leq 1} \left\{ \frac{1}{x_0}, \frac{1}{1-x_0} \right\} \geq 2$ 知, $|f'(\xi_1)|$ 或 $|f'(\xi_2)|$ 有一个 $\geq 2M$. (5分)

(2) 反证. 设 $|f'(x)| \leq 2M, \forall x \in (0, 1)$. 则由(1)中结论知 $\max_{0 \leq x_0 \leq 1} \left\{ \frac{1}{x_0}, \frac{1}{1-x_0} \right\} \leq 2$, 只能是 $x_0 = \frac{1}{2}$, 即 $M = |f(\frac{1}{2})|$. 对任意 $x \in (0, 1)$,

$$\begin{cases} |f(x)| = |f(x) - f(0)| = |f'(\eta_1)|x \leq 2Mx \quad (x \in (0, \frac{1}{2}]), \\ |f(x)| = |f(x) - f(1)| = |f'(\eta_2)|(1-x) \leq 2M(1-x) \quad (x \in (\frac{1}{2}, 1)). \end{cases}$$

即 $|f(x)| \leq g(x) = \begin{cases} 2Mx, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2M(1-x), & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$ (8分)

注意到等号不能恒成立, 否则由 $f(x)$ 连续知, $f(x) \equiv g(x)$ 或 $f(x) \equiv -g(x)$, 则 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处不可导. 不妨设 $c \in (0, \frac{1}{2})$ 使得 $|f(c)| < g(c) = 2Mc$, 则 $|\frac{f(\frac{1}{2}) - f(c)}{\frac{1}{2} - c}| = |f'(\xi)| > \frac{M - 2Mc}{\frac{1}{2} - c} = 2M$. 矛盾. (10分)

七、(8分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上 2 阶可导, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)$ 存在且有限. 证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

证明: (1) 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = A$. 若 $A > 0$, 对 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, $\exists M > 0$, s.t. $x > M$ 时 $\frac{A}{2} < f''(x) < \frac{3A}{2}$. 可得 $f(x) > \frac{A}{4}x^2 + g(x) (x > M)$, 其中 $g(x)$ 为 1 次多项式 (这里可由函数单调性证明, 用积分也可以). 这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在矛盾. 同理可证, $A < 0$ 也不成立. 故 $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = 0$. (4分)

(2) 对任意 $x, h > 0$, 有 Taylor 展开

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

分别取 $h = 1$ 和 $h = 2$ 可得

$$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1(x)). \\ f(x+2) = f(x) + 2f'(x) + 2f''(\xi_2(x)). \end{cases} \quad (6分)$$

两式相减可得:

$$f'(x) = f(x+2) - f(x+1) - 2f''(\xi_2(x)) + \frac{1}{2}f''(\xi_1(x))$$

令 $x \rightarrow +\infty$, 注意到此时 $\xi_i(x) \rightarrow +\infty (i = 1, 2)$, 得

$$\text{即 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+2) - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - 2 \cdot 0 + 0 = 0. \quad (8\text{分})$$