

中国科学技术大学2025秋数学分析B1期末考试参考答案

一、(每小题6分, 共42分)解下列各题.

(1) 求 $\int |x - 1| dx$.

解: 原式 = $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x, & x > 1 \\ x - \frac{1}{2}x^2 - 1, & x \leq 1 \end{cases} + C$.

(2) $\int \sqrt{e^x - 1} dx$.

解: 原式 = $2(\sqrt{e^x - 1} - \arctan \sqrt{e^x - 1}) + C$.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x + \frac{e^x}{1 + e^x}) \sin^2 x dx$.

解: 原式 = $\frac{\pi}{4}$.

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx$.

解: 原式 = $2 \ln 2$.

(5) 求 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 1$ 处的 Taylor 级数及其收敛半径.

解: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, 收敛半径 $R = 1$.

(6) 求一阶常微分方程 $y' + xy = x^3$ 的通解.

解: 通解为 $y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$, C 为任意常数.

(7) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^2$ 的收敛性(说明理由).

解: $(1 - \cos \frac{1}{n})^2 = 4\sin^4(\frac{1}{2n}) \sim \frac{1}{4n^4}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^2$ 收敛.

注: 每小题6分, 如结果错误但有正确的计算过程, 建议酌情给分; 1,2)中不定积分掉 C 扣1分; 6)中如写出了求解公式建议给3分. 7)有结论无理由给2分.

二、(12分) 设 D 为曲线 $y = \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 与两坐标轴所围成的区域.

(1) 若 $y = a \sin x$ 将 D 的面积等分, 求 a .

(2) 求 D 绕 Y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解: (1) 设 $y = \cos x$ 与 $y = a \sin x$ 的交点 x 坐标为 x_0 , 则 $x_0 = \arctan \frac{1}{a}$. 于是

$$\int_0^{x_0} (\cos x - a \sin x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{2} = \sin x_0 + a \cos x_0 - a. \quad (4分)$$

代入 $\sin x_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}, \cos x_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$, 解得 $a = \frac{3}{4}$. (6分)

(2) 体积为 $V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ 或 $V = \pi \int_0^1 [x(y)]^2 dy = \pi \int_0^1 (\arccos y)^2 dy$. (10分)
 计算结果为 $\pi^2 - 2\pi$. (12分)

三、(10分) 设 $f(x)$ 满足 $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x (1+2x-2t)f(t)dt$, 求 $f(x)$.

解: $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x (1-2t)f(t)dt + 2x \int_0^x f(t)dt$. 求导并化简得:

$$f'(x) = 1 - x - x^2 + f(x) + 2 \int_0^x f(t)dt. \quad (2分)$$

继续求导可得

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = -1 - 2x. \quad (4分)$$

对应的齐次方程的通解为 $f_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. (6分)

设非齐次方程的特解为 $f_p(x) = ax + b$, 代入可得 $a = 1, b = 0$. (8分)

故二阶ODE通解为 $f(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x$. 显然 $f(x)$ 满足初始条件

$$f(0) = 0, f'(0) = 1.$$

代入可得 $C_1 = 0, C_2 = 0$. 于是 $f(x) = x$. (10分)

四、(8分) 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x}}{n}$ 的收敛域, 并证明其和函数在收敛域上可导.

解: 当 $x \leq 0$ 时, $\frac{e^{-n^2x}}{n} \geq \frac{1}{n}$, 由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x}}{n}$ 发散; 反之, 当 $x > 0$ 时, $\frac{e^{-n^2x}}{n} < \frac{1}{n^3x}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3x}$ 收敛, 故此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x}}{n}$ 收敛. 综合知, 级数的收敛域为 $(0, +\infty)$. (4分)

对任意 $\delta > 0$, $|-ne^{-n^2x}| \leq ne^{-n^2\delta} \leq \frac{2}{n^3\delta^2} (\forall x \geq \delta)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛. 由Weierstrass判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} -ne^{-n^2x}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x}}{n}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 可导. (6分)

由 δ 的任意性和求导的点态性知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x}}{n}$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导且可逐项求导. (8分)

五、(10分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} x^n$ 的收敛域与和函数.

解: 收敛半径为 $R = 1$. 易验证 $x = 1$ 处发散, $x = -1$ 处收敛. 故幂级数收敛域为 $[-1, 1)$. (3分)

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} x^n$, 则

$$xS(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} x^{3n+1} \Rightarrow (xS(x^3))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}. \quad (7分)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 3xS(x^3) = \int_0^x \frac{3}{1-t^3} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{t^2+t+1} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \ln(1-x^3) - \frac{3}{2} \ln(1-x) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}. \\
&\Rightarrow S(x) = \frac{1}{6\sqrt[3]{x}} \left(\ln(1-x) - 3\ln(1-\sqrt[3]{x}) + 2\sqrt{3} \arctan \frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} \right). \quad (10\text{分})
\end{aligned}$$

$x=0$ 时 $S(x)$ 取极限值为1(若没有交待, 就不扣分了).

六、(10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续导函数, $a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx$.

(1) 证明: $\{na_n\}$ 有界.

(2) 进一步证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{f(1) - f(0)}{2}$.

证明: 将 $[0, 1]$ n 等分, 分点为 $x_k = \frac{k}{n}$, $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. 则:

$$\text{解法一: } na_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 f(x) dx = n \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(x)) dx \right) \quad (3\text{分})$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(\int_x^{x_k} f'(t) dt \right) dx = n \sum_{k=1}^n \left[\left(x \int_x^{x_k} f'(t) dt \right) \Big|_{x_{k-1}}^{x_k} + \int_{x_{k-1}}^{x_k} x f'(x) dx \right] \\
&= n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1}) f'(x) dx \quad (6\text{分})
\end{aligned}$$

$$= n \sum_{k=1}^n f'(\xi_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1}) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f'(\xi_k) \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f'(\xi_k) \Delta x_k \quad (8\text{分})$$

所以极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{f(1) - f(0)}{2}. \quad (10\text{分})$$

$$\text{解法二: } na_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 f(x) dx = n \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(x)) dx \right) \quad (3\text{分})$$

$$\begin{aligned}
&= n \left(\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x_k) - f(x)}{x_k - x} (x_k - x) dx \right) \\
&= n \left(\sum_{k=1}^n \frac{f(\xi_k) - f(x_k)}{\xi_k - x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x) dx \right) \quad (\text{其中 } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)) \\
&= n \left(\sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x) dx \right) \quad (\text{其中 } \eta_k \text{ 在 } \xi_k, x_k \text{ 之间}) \quad (6\text{分})
\end{aligned}$$

$$= n \left(\sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \left(\frac{1}{2} (x_k - x_{k-1})^2 \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \Delta x_k \right) \quad (8\text{分})$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = \frac{f(1) - f(0)}{2}. \quad (10\text{分})$$

若只证明第一问: 设 M 为 $|f'(x)|$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值. 则

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(x)) dx \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(\xi_k) \left(x - \frac{k}{n} \right) dx \quad (3\text{分})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(\xi_k)| \cdot \left| x - \frac{k}{n} \right| dx \leq M \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| x - \frac{k}{n} \right| dx = M \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$$

$$\Rightarrow |na_n| \leq \frac{M}{2}. \quad (5\text{分})$$

注：若直接证明了第二问，给满分.

七、(8分) 设 a_n 为 $x^n + nx - 1 = 0$ 的正实根.

(1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 的收敛域.

(2) 若 x 为收敛域中的点, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 是条件收敛还是绝对收敛?

解: 因 $f(x) = x^n + nx - 1, f'(x) = nx^{n-1} + n > 0 (x > 0), f(0) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 因此正实根存在唯一. 对给定的 n ,

$$f\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^n}\right) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^n}\right)^n + n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^n}\right) - 1 < \frac{1}{n^n} - \frac{1}{n^{n-1}} < 0,$$

且 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n} > 0$, 故 $a_n \in \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^n}, \frac{1}{n}\right)$. (2分)

于是当 n 充分大时,

$$\frac{1}{n} > a_n > \frac{1}{n} - \frac{1}{n^n} > \frac{1}{n+1} > a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\} \text{单调递减趋于} 0.$$

对任意 $x \neq 2m\pi (m \in \mathbf{N})$, $\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$. 故由Dirichlet判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收敛. 而当 $x = 2m\pi (m \in \mathbf{N})$, 由于 $a_n > \frac{1}{n+1}$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 发散. 综合知, 级数的收敛域为 $\{x : x \neq 2m\pi (m \in \mathbf{N})\}$. (4分)

(2) 当 $x \neq 2m\pi (m \in \mathbf{N})$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收敛. 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos 2nx}{2(n+1)}. \quad (6\text{分})$$

(I) $x = (2m+1)\pi (m \in \mathbf{N})$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, 级数发散;

(II) $x \neq m\pi (m \in \mathbf{N})$, 此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2(n+1)}$ 收敛(Dirichlet判别法), $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx|$ 发散. 即对收敛域中的每一点 x , $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 都条件收敛. (8分)

注: 也可由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{n}\right) \cos nx$, 可知当 $x \neq 2m\pi (m \in \mathbf{N})$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{n}\right) \cos nx$ 绝对收敛, 推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 条件收敛.