

A3期中试题

一、判别下列级数的敛散性（28分）

1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性。
2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$ 的敛散性。
3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n + \sqrt{n}}$ 的敛散性。
4. 判别无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ 的敛散性。

二、（12分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n \neq 0$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} = 1$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}$ 的绝对收敛性与条件收敛性。

三、（16分）

求下列幂级数的收敛域及和函数（其中 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ）:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$$

四、（12分）

设函数列 $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ ($n = 1, 2, \dots$, $\alpha \in \mathbb{R}$), 讨论 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0, 1]$ 上的一致收敛性。

五、（10分）

设单调递减数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 且 $\{\sum_{k=1}^n (a_k - a_n)\}$ 有界, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

六、（10分）

设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数列, 且对每个 $x \in [a, b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 单调增加收敛于 $f(x)$, 证明函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最小值。

七、(12分)

设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： 1. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续； 2. $g(x) = f(2x) - f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导。

证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可导。

数学分析A3期中参考解答(仅供参考)

2025 年 11 月 4 日

一(28分)、判断级数或无穷乘积的敛散性。

得分	
----	--

给分建议：没有说明原因直接给出正确答案至多得3分.

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n};$

解答：记 $a_n = n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ ，由比值判别法有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{\sin(\pi/2^{n+1})}{\sin(\pi/2^n)} = \frac{1}{2} < 1,$$

因此级数收敛。

(2). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$

解答：记 $a_n = e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n > 0$ 。由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1/n} = \frac{e}{2},$$

因此由比较判别法知级数发散。

(3). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n + \sqrt{n}};$

解答：由Dirichlet判别法知： $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 收敛，注意到：

$$\frac{\cos n}{n + \sqrt{n}} = \frac{\cos n}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

和 $\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}$ 单调递增收敛于1，因此利用Abel判别法知收敛。

(4). $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$.

解答：记 $a_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = 1 - \frac{2}{n^3 + 1}$ 。

法1. 直接计算其值为 $\frac{2}{3}$ 。

法2. 考虑

$$\ln a_n = \ln \left(1 - \frac{2}{n^3 + 1} \right) \sim -\frac{2}{n^3} \quad (n \rightarrow \infty)$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛，所以 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln a_n$ 绝对收敛，因此无穷乘积收敛（且收敛到非零值）。

二(12分)、设数列 $\{a_n\}$ 满足：

得分	
----	--

$$a_n \neq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} = 1,$$

讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}$ 的条件收敛性和绝对收敛性。

解答：注意到 $S_n = \frac{1}{a_1} + (-1)^{n+1} \frac{1}{a_{n+1}}$ ，利用题目条件可得： $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a_1}$ ，因此级数收敛。 (6分)

不妨设 $a_n > 0$ ，注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n + a_{n+1}}{a_n a_{n+1}}}{1/n} = 2$$

因此可知级数是条件收敛的。 (6分)

三(16分)、 分别计算幂级数

得分	
----	--

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$$

的收敛点集及和函数，这里 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 。

解答：第一个幂级数

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

收敛半径用根值判别法或比值判别法：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

所以收敛半径 $R = 1$ 。当 $x = 1$ 时，级数为 $\sum \frac{1}{n}$ 调和级数，发散。当 $x = -1$ 时，级数为 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 交错调和级数，收敛。因此收敛域为： $[-1, 1)$ 。 (4分)

已知公式 (对 $|x| < 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

在 $x = -1$ 时也成立 (Abel 定理):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

所以: (4分)

$$S_1(x) = -\ln(1-x), \quad x \in [-1, 1).$$

2. 第二个幂级数

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n, \quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

注意到 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{H_n} = 1$, 因此收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$ 时, $H_n \rightarrow \infty$ 时, 一般项不趋于 0, 发散. 当 $x = -1$ 时, H_n 递增趋于 $+\infty$, $(-1)^n H_n$ 不趋于 0 (因 H_n 不趋于 0), 所以发散. 因此收敛域为: $(-1, 1)$. (4分)

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{\infty} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

所以: (4分)

$$S_2(x) = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

四(12分)、记

得分	
----	--

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

讨论函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上的一致收敛性。

解答: 注意到当 $x = 0$ 时, $f_n(0) = 0$. 当 $x > 0$ 时, $e^{-nx} \rightarrow 0$ 的速度快于 n^α 的增长, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

故极限函数为 (4分)

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in [0, 1].$$

定义 (2分)

$$M_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} n^\alpha x e^{-nx}.$$

令 $g(x) = xe^{-nx}$, 求导:

$$g'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = e^{-nx}(1 - nx).$$

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{n}$ (当 $n \geq 2$ 时该点在区间内)。计算:

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}e^{-1}.$$

因此

$$M_n = n^\alpha \cdot \frac{1}{n}e^{-1} = \frac{1}{e}n^{\alpha-1}.$$

其一致收敛等价于 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$, 因此函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上当且仅当 $\alpha < 1$ 时一致收敛于极限函数 $f(x) \equiv 0$. (6分)

五(10分)、 设单调递减数列 $\{a_n\}$ 满足:

得分	
----	--

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - a_n) \right\} \text{ 有界},$$

试证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明: 由题目条件知, 存在 $M > 0$ 使得 $0 \leq S_n - na_n \leq M$. 对于任意的 $m \leq n$, 有

$$M \geq \sum_{k=1}^m (a_k - a_n) + \sum_{k=m+1}^n (a_k - a_m) \leq \sum_{k=1}^m (a_k - a_n) = S_m - ma_n, \quad (4)$$

令 $n \rightarrow \infty$ 可得 $S_m \leq M$. 由于 $a_n \geq 0$, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. (6分)

六(10分)、 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数列, 且对于每个 $x \in [a, b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 单调增加收敛于 $f(x)$. 试证: 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有最小值.

得分	
----	--

证明: 先证: $f(x)$ 有下界且下确界有限. 由题目中的单调收敛的条件知, 对所有 x , $f(x) \geq f_1(x)$. 而 $f_1(x)$ 连续, 在 $[a, b]$ 上有最小值 m_1 , 于是

$$f(x) \geq m_1 > -\infty,$$

这表明 $f(x)$ 有下界且下确界 $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) > -\infty$. (3分)

问题转化为证明: 存在 $x^* \in [a, b]$ 使得 $f(x^*) = m$ 即可. 证明正确(7分)

方法一、由下确界定义知, 存在序列 $\{y_k\} \subset [a, b]$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = m$. 假设 $f(x) > m$ 对所有 x 成立, 那么对每个 x , 存在自然数 n_x 使得

$$f_{n_x}(x) > m.$$

因为 f_{n_x} 连续, 存在开邻域 U_x 使得

$$f_{n_x}(y) > m \quad \forall y \in U_x \cap [a, b].$$

由 $f_n(y)$ 单调增, 当 $n \geq n_x$ 时, $f_n(y) \geq f_{n_x}(y) > m$, 所以

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \geq f_{n_x}(y) > m.$$

由于 $[a, b]$ 被这些 U_x 覆盖, 存在有限子覆盖 $U_{x_1}, \dots, U_{x_r}$. 令

$$N = \max\{n_{x_1}, \dots, n_{x_r}\}.$$

则对任意 $y \in [a, b]$, y 属于某个 U_{x_j} , 于是

$$f_N(y) \geq f_{n_{x_j}}(y) > m.$$

由于 f_N 连续, 在紧集 $[a, b]$ 上有最小值 $\mu_N = \min_{[a, b]} f_N$, 那么

$$\mu_N > m.$$

由 $f_n \uparrow f$, 有 $f(y) \geq f_N(y) \geq \mu_N > m$ 对所有 y 成立。于是

$$\inf_{[a, b]} f \geq \mu_N > m,$$

这与 $m = \inf f$ 矛盾。矛盾说明假设“ $f(x) > m$ 对所有 x ”错误, 因此存在 $x^* \in [a, b]$ 使得 $f(x^*) = m$, 即 f 在 $[a, b]$ 上取得最小值。

方法二、由下确界定义知, 存在序列 $\{y_k\} \subset [a, b]$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_k) = m$ 。由于 $\{y_k\} \subset [a, b]$, 因此存在收敛子列 $\{y_{k_j}\}$ 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} y_{k_j} = x^* \in [a, b]$ 。断言: $f(x^*) = m$ 。

由 m 的定义显然知: $f(x^*) \geq m$ 。由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x^*) = f(x^*)$, 于是 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ 使得当 $n \geq N$ 时, 有

$$f(x^*) - f_n(x^*) < \frac{\epsilon}{2}$$

特别地, $f_N(x^*) > f(x^*) - \frac{\epsilon}{2}$ 。又函数 $f_N(x)$ 连续, 因此 $\exists \delta > 0$ 使得当 $|x - x^*| < \delta$ 时有

$$f_N(x) > f_N(x^*) - \frac{\epsilon}{2} > f(x^*) - \epsilon$$

从而有:

$$f(x) \geq f_N(x) > f_N(x^*) - \frac{\epsilon}{2} > f(x^*) - \epsilon$$

特别地有, $f(y_{k_j}) \geq f(x^*) - \epsilon$, 和 $m \geq f(c) - \epsilon$ 由 ϵ 的任意性可知成立。

七(12分)、设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x), g(x)$ 满足:

得分	
----	--

- (1). $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续; (2). $g(x) = f(2x) - f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微;

试证: $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微。

证明: 注意到: (3分)

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right] = f(x) - f(0)$$

$\forall a > 0$, 考察区间 $[-a, a]$, 则 $g(x) \in C^1([-a, a])$. 从而存在常数 $M > 0$ 使得

$$|g'(x)| \leq M, \quad x \in [-a, a]$$

上成立。进一步注意到 $g(0) = 0$, 并利用微分中值定理得

$$\left| g\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| = \left| g\left(\frac{x}{2^n}\right) - g(0) \right| = |g'(\xi)| \cdot \frac{x}{2^n} \leq M \cdot \left| \frac{x}{2^n} \right| \leq M \cdot \frac{a}{2^n}, \quad x \in [-a, a]$$

由Weierstrass M-判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right)$ 在 $[-a, a]$ 上一致收敛。 (3分)

考虑导数项:

$$\frac{d}{dx} \left[g\left(\frac{x}{2^n}\right) \right] = \frac{1}{2^n} g'\left(\frac{x}{2^n}\right),$$

并且 $\left| \frac{1}{2^n} g'\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq \frac{M}{2^n}$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g'\left(\frac{x}{2^n}\right)$ 在 $[-a, a]$ 上一致收敛。 (3分)

从而有 $S(x) = f(x) - f(0)$ 在 $[-a, a]$ 上连续可微。由 a 的任意性可知, $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微。 (3分)