

中国科学技术大学2025-2026第一学年

数学分析A3期末考试参考解答

2026年1月12日

1. (30分) 判断下列命题的真伪并说明理由.

(1). 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上非负连续, 且反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

解答: 错误 (4分)

反例: 对于 $n \geq 2$, 定义三角形脉冲函数:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 \left[x - \left(n - \frac{1}{n^2} \right) \right], & x \in \left[n - \frac{1}{n^2}, n \right), \\ -n^2 \left[x - \left(n + \frac{1}{n^2} \right) \right], & x \in \left[n, n + \frac{1}{n^2} \right], \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

令

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x).$$

每个 $f_n(x) \geq 0$, 且在边界处取值 0, 故 $f(x)$ 非负且连续 (在不同脉冲的支撑区间不重叠时, $f(x)$ 分段连续且在连接点取值为0, 从而整体连续)。脉冲 f_n 的支撑集为 $\left[n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2} \right]$, 长度为 $\frac{2}{n^2}$ 。且 f_n 与 f_{n+1} 的支撑不交, 每个脉冲的面积为:

$$\int_{n-1/n^2}^{n+1/n^2} f_n(x) dx = \frac{1}{n^2}.$$

从而

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < +\infty,$$

因此反常积分收敛。

取 $x_n = n$, 则 $f(n) = 1$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 1$ 。取 $y_n = n + \frac{1}{2}$, 对充分大的 n 有 y_n 不在任何脉冲支撑内, 故 $f(y_n) = 0$ 。因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不存在, 当然不趋于 0。

(2). 设 $\varphi(t) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + t^2} dx$ ($0 \leq t \leq 1$), 则 $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi'(t) = \varphi'(0)$ 。

解答: 正确 (4分)

注意到 $\ln \sqrt{x^2 + t^2}$ 和

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \sqrt{x^2 + t^2} = \frac{t}{x^2 + t^2}$$

在 $(0, 0)$ 处不连续, 故不能用积分号下对 t 求导数的方法来求 $\varphi'(0)$ 。注意到 $\varphi(0) = \int_0^1 \ln x dx = -1$ 和当 $t > 0$ 有

$$\varphi(t) = \ln \sqrt{1 + t^2} - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + t^2} dx = \ln \sqrt{1 + t^2} - 1 + t \arctan \frac{1}{t}.$$

因此当 $t > 0$ 时, $\varphi'(t) = \arctan \left(\frac{1}{t}\right)$, 且有: (3分)

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{t} \ln \sqrt{1 + t^2} + \arctan \frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

从而有: $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi'(t) = \varphi'(0)$ 。 (3分)

注记: 当 $t > 0$ 时, 也可由含参变量积分求导公式有,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2 + t^2) dx = t \int_0^1 \frac{1}{x^2 + t^2} dx = \arctan \left(\frac{1}{t}\right).$$

从而有 $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi'(t) = \frac{\pi}{2}$ 。

$$(3). \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^6} dx = \frac{\pi}{6}.$$

解答: 错误 (4分)

令 $w = x^6$ 后, 使用余元公式可得

$$\text{原式} = \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{w^{-5/6}}{1 + w} dw = \frac{1}{6} B\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\pi}{6 \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3}. \quad \dots\dots (6分)$$

二、 (12分) 将函数 $f(x) = |x|$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成其Fourier级数, 并由此计算级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和。

解答: 注意到 $f(x)$ 为偶函数, 因此 $b_n = 0$ (3分)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2}. \quad \dots\dots (3分)$$

由Dirichlet定理有:

$$|x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}. \quad \dots\dots (4分)$$

取 $x = 0$ 可得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \dots\dots (2分)$$

三、 (10分) 试证: 广义积分 $\int_1^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$ 条件收敛, 其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分。

证明: 记 $f(x) = (-1)^{[x^2]}$, 则

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T f(x) dx.$$

设 $N = [T^2]$, 因此 $\sqrt{N} \leq T < \sqrt{N+1}$, 于是 (2分)

$$\int_1^T f(x) dx = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^k dx + R(T) = \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) + R(T),$$

其中

$$R(T) = \int_{\sqrt{N}}^T f(x) dx = (-1)^N (T - \sqrt{N}) \leq \frac{1}{\sqrt{N+1} + \sqrt{N}} \rightarrow 0 (T \rightarrow +\infty).$$

因此有,

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^k dx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

由 Leibniz 判别法, 交错级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ 收敛, 从而原积分收敛. (5分)

因为 $|f(x)| = 1$ 对所有 x 成立, 所以

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^{+\infty} 1 dx = +\infty.$$

这表明积分 $\int_1^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$ 为条件收敛。..... (3分)

四、(10分) 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则存在数列 $x_n \rightarrow +\infty$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ 。

证明: (反证法) 假设不存在数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \rightarrow +\infty$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ 。于是 $\liminf_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| > 0$ 。换句话说, 存在常数 $\varepsilon > 0$ 及 $M > 0$, 使得当 $x \geq M$ 时, $|f(x)| \geq \varepsilon$ 。理由: 如果对于某个 $\varepsilon > 0$ 和任意的 M , 总存在 $x \geq M$ 使得 $|f(x)| < \varepsilon$, 那么我们可以依次取 $\varepsilon = 1/n$ 和 $M = n$, 得到一列 $x_n \geq n$ 满足 $|f(x_n)| < 1/n$, 此 x_n 即满足 $x_n \rightarrow \infty$ 且 $f(x_n) \rightarrow 0$, 与假设矛盾。所以假设不成立时, 必存在 $\varepsilon > 0$ 与 $M > 0$, 使得

$$|f(x)| \geq \varepsilon, \quad \forall x \geq M. \quad (1) \quad \dots\dots (3分)$$

由 (1) 知 f 在 $[M, \infty)$ 上连续且恒不为零。由连续函数的介值性, f 在该区间上不能变号 (否则存在 x_0 使 $f(x_0) = 0$, 违反 (1))。因此, $f(x)$ 在 $[M, \infty)$ 上恒有

$$f(x) \geq \varepsilon \quad \text{或} \quad f(x) \leq -\varepsilon, \quad \forall x \geq M. \quad \dots\dots (4分)$$

当 $f(x) \geq \varepsilon$ ($\forall x \geq M$) 时,

$$\int_M^t f(x) dx \geq \varepsilon(t - M) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty,$$

所以 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 发散 (至 $+\infty$)。..... (3分)

类似地, 当 $f(x) \leq -\varepsilon$ ($\forall x \geq M$) 时, 积分发散至 $-\infty$ 。两种情况均与题设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛矛盾。因此, 原假设不成立, 必存在数列 $x_n \rightarrow +\infty$ 使

得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

五、 (10分) 设 $f(x)$ 以 2π 为周期可微函数, 且 $f'(x)$ 也连续, 试证: 其 Fourier 级数一致收敛于 $f(x)$.

证明: 注意到 f 是 C^1 的周期函数, 因此 f 的 Fourier 级数为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad \dots\dots (2分)$$

$$\text{其中 } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

设 f' 的 Fourier 系数为 a'_n, b'_n , 则由分部积分有

$$a'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = nb_n,$$

和

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} [f(x) \sin(nx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = -na_n. \dots (2分)$$

由 Parseval 等式可有

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \frac{(a'_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a'_n)^2 + (b'_n)^2],$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(a'_n)^2 + (b'_n)^2] < +\infty. \quad \dots\dots (2分)$$

用 Cauchy - Schwarz 不等式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b'_n|}{n} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (b'_n)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} < +\infty,$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a'_n)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} < +\infty.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < +\infty. \quad \dots\dots (2\text{分})$$

对任意 x , 有

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

由 Weierstrass 判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$ 。 $\dots\dots (2\text{分})$

六、 (18分) 试证: 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$ 收敛, 并计算其值.

得分	
----	--

证明. 为了记号简单, 记

$$f(x, \alpha) = \frac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad \psi(\alpha) = \int_1^{+\infty} f(x, \alpha) dx.$$

(1) 先把积分拆分成两部分:

$$\int_1^{+\infty} f(x, \alpha) dx = \int_1^2 f(x, \alpha) dx + \int_2^{+\infty} f(x, \alpha) dx.$$

下面对 $\alpha > 0$ 时都收敛, 当然对 $\alpha = 1$ 亦成立. 注意到

- 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x, \alpha) \sim \frac{\pi}{2x^3}$, 积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$ 收敛.
- 当 $x \rightarrow 1^+$ 时, $f(x, \alpha) \sim \frac{\arctan(\alpha)}{\sqrt{2(x-1)}}$, 积分 $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ 是收敛的.

从而知广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x, \alpha) dx$ 收敛. $\dots\dots (8\text{分})$

(2) 注意到 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ 收敛且

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right| = \left| \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2 x^2)} \right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$$

由 Weierstrass 判别法知, $\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx$ 在 $\alpha \geq 0$ 上一致收敛. (5分)

因此可以交换积分和导数的顺序,

$$\begin{aligned}\psi'(\alpha) &= \int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\alpha^2\sec^2\theta} d\theta \quad \text{令 } x = \sec\theta, t = \tan\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2(1+t^2)} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right).\end{aligned}$$

结合 $\psi(0) = 0$ 有, $\psi(\alpha) = \frac{\pi}{2} (1 + \alpha - \sqrt{1 + \alpha^2})$ (5分)

七、 (10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且 $f(x) > 0$, 定义

$$g(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

试证: $\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = \frac{\pi}{2} f(0)$.

证法1. 令

$$K_y(x) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

则有

$$\int_0^1 K_y(x) dx = \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \left[\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \right]_{x=0}^1 = \arctan\left(\frac{1}{y}\right).$$

因此

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^1 K_y(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

注意到

$$g(y) = f(0) \int_0^1 K_y(x) dx + \int_0^1 \frac{y[f(x) - f(0)]}{x^2 + y^2} dx. \quad \dots\dots (2分)$$

已知第一项极限是 $f(0) \cdot \frac{\pi}{2}$, 我们只需证明第二项

$$R(y) := \int_0^1 \frac{y[f(x) - f(0)]}{x^2 + y^2} dx \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow 0^+).$$

给定 $\varepsilon > 0$, 由连续性, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 \leq x \leq \delta$ 时,

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

将积分分成 $[0, \delta]$ 和 $[\delta, 1]$ 两部分。

(i) 区间 $[0, \delta]$:

$$\left| \int_0^\delta \frac{y[f(x) - f(0)]}{x^2 + y^2} dx \right| \leq \varepsilon \int_0^\delta \frac{y}{x^2 + y^2} dx \leq \varepsilon \int_0^\infty \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}. \quad \dots\dots (3\text{分})$$

(ii) 区间 $[\delta, 1]$: 当 $x \geq \delta$ 时, $\frac{y}{x^2 + y^2} \leq \frac{y}{\delta^2}$, 且 $f(x) - f(0)$ 在 $[\delta, 1]$ 上连续, 故有界 $|f(x) - f(0)| \leq M$, M 是常数。于是

$$\left| \int_\delta^1 \frac{y[f(x) - f(0)]}{x^2 + y^2} dx \right| \leq M \cdot \frac{y}{\delta^2} \cdot (1 - \delta). \quad \dots\dots (3\text{分})$$

当 $y \rightarrow 0^+$, 这个上界趋于 0。因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 当 y 足够小:

$$|R(y)| \leq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} + M \frac{y}{\delta^2} (1 - \delta).$$

于是 $\limsup_{y \rightarrow 0^+} |R(y)| \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon$, 由 ε 任意性知 $R(y) \rightarrow 0$ 。所以

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = f(0) \cdot \frac{\pi}{2}. \quad \dots\dots (2\text{分})$$

证法2. 作变量代换 $x = yt$ 有

$$g(y) = \int_0^{1/y} \frac{yf(yt)}{y^2 t^2 + y^2} \cdot y dt = \int_0^{1/y} \frac{y^2 f(yt)}{y^2 (t^2 + 1)} dt = \int_0^{1/y} \frac{f(yt)}{t^2 + 1} dt, \quad y > 0.$$

由于 f 在 $[0, 1]$ 上连续, 从而一致连续, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $|yt| < \delta$ 时

$$|f(yt) - f(0)| < \varepsilon. \quad \dots\dots (2\text{分})$$

又注意到 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{2}$, 因此存在充分大 T_0 使得

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{M}{t^2+1} dt < \varepsilon, \quad M = \max_{x \in [0,1]} f(x). \quad \dots\dots (2分)$$

对足够小的 $y > 0$ 使 $1/y > T_0$, 且 $yT_0 < \delta$, 我们有

$$g(y) = \int_0^{T_0} \frac{f(yt)}{t^2+1} dt + \int_{T_0}^{1/y} \frac{f(yt)}{t^2+1} dt.$$

第二个积分

$$\left| \int_{T_0}^{1/y} \frac{f(yt)}{t^2+1} dt \right| \leq M \int_{T_0}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt < M\varepsilon.$$

第一个积分中, 因 $t \in [0, T_0]$, 当 y 足够小, $yt \leq yT_0 < \delta_1$, 从而

$$|f(yt) - f(0)| < \varepsilon.$$

于是

$$\left| \int_0^{T_0} \frac{f(yt)}{t^2+1} dt - f(0) \int_0^{T_0} \frac{1}{t^2+1} dt \right| \leq \varepsilon \int_0^{T_0} \frac{1}{t^2+1} dt \leq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}. \quad \dots\dots (2分)$$

而且

$$f(0) \int_{T_0}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \leq f(0)\varepsilon.$$

合起来:

$$\left| g(y) - f(0) \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} + M\varepsilon + f(0)\varepsilon.$$

因为 ε 任意小, 得

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} g(y) = f(0) \cdot \frac{\pi}{2}. \quad \dots\dots (4分)$$