

# 2025年数学分析(A2)期中考试

授课教师: 李平、罗罗

2025年4月26日 15:00-17:00

一、(20分) 计算题, 给出必要的计算步骤。

(1) 计算曲面  $\mathbf{r} = (u \sin v, u \cos v, v)$  在点  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$  点处的切平面和法线方程。

(2) 计算映射  $\mathbf{f} = (\sin(xy), \cos(x^2 + y^2))^T$  在点  $(1, 1)$  处的Jacobi矩阵。

二、(15分) 计算  $z = \frac{1}{1+xy}$  在  $(0, 0)$  处的泰勒展开 (带Peano余项), 并计算  $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m}(0, 0)$  的值。

三、(20分) 研究函数  $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$  在原点处的连续性、可微性, 以及偏导数的存在性、连续性。

四、(15分) 设函数  $z = z(x, y)$  是由方程  $F(z + \frac{1}{x}, z - \frac{1}{y}) = 0$  所确定的隐函数, 且具有连续二阶偏导数, 证明:  $x^3 \partial_x^2 z + xy(x - y) \partial_x \partial_y z - y^3 \partial_y^2 z + 2 = 0$ 。

五、(10分) 设点集  $D \subset \mathbb{R}^n$ . 证明:  $D$  是紧集当且仅当  $D$  上的每个连续函数都有界。

六、(10分) 设光滑封闭曲面  $S$  的方程是  $F(x, y, z) = 0$ . 证明:  $S$  上任意两个相距最远的点处的切平面相互平行, 且垂直于这两点之间的连线。

七、(10分) 设  $\mathbf{f}: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  是满射, 且存在常数  $C, \gamma > 0$ , 使得对任意  $x, y \in [0, 1]$  都有  $\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)\| \leq C|x - y|^\gamma$  成立。证明:  $\gamma \leq \frac{1}{2}$ 。