中国科学技术大学2024-2025学年第二学期
《数学分析A2》期末考试试卷(A卷)参考解答

一. (15分) 设 $\alpha > 1$. 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y^\alpha}{\sqrt{x+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $x=0, y=0$ 和 $x+y=1$ 所围成的区域.

解 作变换 $\Phi:\ x = r^2\cos^2\varphi,\ y = r\sin\varphi$. 则 $|J\Phi| = 2r^2\cos\varphi$, 且此变换将矩形 $D' = \{(r,\varphi):\ 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ 映成 D. 故,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \frac{y^\alpha}{\sqrt{x+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'} \frac{r^\alpha \sin^\alpha\varphi}{r}\cdot 2r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\int_0^1 r^{\alpha+1}\,\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\cdot\frac{1}{\alpha+2}\cdot\frac{1}{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

于是所求积分的值为 $\frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$.

二. (本题20分, 每小题10分)

(1) 设 L 是由 $|x|^3 + 3|y| = 1$ 确定的封闭曲线. 计算第一型曲线积分 $\displaystyle\int\limits_L |x|^3\ \mathrm{d}s$.

解: 设 L 在第一象限的部分是 L_1, 其方程是 $y = \frac{1}{3}(1-x^3)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. 于是

$$\begin{aligned}
\int\limits_L |x|^3\ \mathrm{d}s = 4\int\limits_{L_1} x^3\ \mathrm{d}s &= 4\int_0^1 x^3\sqrt{1+(y'(x))^2}\ \mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1+t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

(2) 求第二型曲线积分 $\displaystyle\int_L \frac{-y}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{4x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$, 其中 L 是圆周 $x^2+y^2=9$ 方向为逆时针方向.

解: 记 $P = \frac{-y}{4x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{4x^2+y^2}$. 曲线 $L_1:\ 4x^2+y^2=4$ 方向顺时针. 在 L 与 L_1 所围成的环状区域内 P, Q 都是连续可微的, 且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

根据 Green 公式, 得

$$\int\limits_{L+L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0.$$

故,

$$\int\limits_{L} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int\limits_{-L_1} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

再由 Green 公式

$$\frac{1}{4}\int\limits_{-L_1} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\iint\limits_{D} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sigma(D) = \pi,$$

其中 $D:\ 4x^2+y^2 \leqslant 4$, $\sigma(D)=2\pi$ 是 D 得面积. 故, 所求积分的值为 π.

三. (16分) 求曲面积分 $I = \iint\limits_{S} (x^2-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (y^2-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (z^2-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是半径为 R 的上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(z \geqslant 0)$, 方向朝上.

解: S 的参数方程为

$$x = R\sin\theta\cos\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

在 S 上的点 (x,y,z) 处的单位法向为 $\frac{(x,y,z)}{R}$. 故,

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{S} (x^2-x, y^2-y, z^2-z)\cdot\frac{(x,y,z)}{R}\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{R}\iint\limits_{S}\left[x^3+y^3+z^3-(x^2+y^2+z^2)\right]\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{R}\iint\limits_{S}\left[x^3+y^3+z^3-R^2\right]\,\mathrm{d}S. \end{aligned}$$

由对称性可知

$$\iint\limits_{S} x^3\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S} y^3\,\mathrm{d}S = 0.$$

故,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{R}\iint\limits_{S} z^3\,\mathrm{d}S - R\iint\limits_{S}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{R}\iint\limits_{S} z^3\,\mathrm{d}S - 2\pi R^3 \\ &= \frac{1}{R}\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} (R\cos\theta)^3 R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi - 2\pi R^3 \\ &= 2\pi R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - 2\pi R^3 \\ &= 2\pi R^4\cdot\frac{1}{4} - 2\pi R^3 \\ &= \frac{\pi R^4}{2} - 2\pi R^3. \end{aligned}$$

四. (15分) 设 n 是正整数, Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 法向朝外. 计算

$$I=\iint_{\Sigma} x^n \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^n \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^n \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: 因为 (x^n, y^n, z^n) 在 Σ 所围的椭球体 V 上都是光滑的, 所以由 Gauss 公式可得

$$I=\iiint_V \left(nx^{n-1}+ny^{n-1}+nz^{n-1}\right)\,\mathrm{d}\sigma=n\iiint_V \left(x^{n-1}+y^{n-1}+z^{n-1}\right)\,\mathrm{d}\sigma.$$

对上面最后的三重积分作变换 $\Phi:\ x=au, y=bv, z=cw$. 该变换将半径为 1 的球体 $B:\ u^2+v^2+w^2\leqslant 1$ 映为 V. 因此

$$\begin{aligned}I&=n\iiint_B (a^{n-1}u^{n-1}+b^{n-1}v^{n-1}+c^{n-1}w^{n-1})abc\,\mathrm{d}\sigma\\&=nabc\iiint_B (a^{n-1}u^{n-1}+b^{n-1}v^{n-1}+c^{n-1}w^{n-1})\,\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

根据对称性, 有

$$\iiint_B u^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_B v^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma=\iiint_B w^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma.$$

因而

$$I=nabc\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\iiint_B w^{n-1}\,\mathrm{d}\sigma.$$

B 的参数方程是 $u=r\sin\theta\cos\varphi$, $v=r\sin\theta\sin\varphi$, $w=r\cos\theta$, 其中 $0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 于是

$$\begin{aligned}I&=nabc\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\0\leqslant\theta\leqslant\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}}(r\cos\theta)^{n-1}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\\&=nabc\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\int_0^1 r^{n+1}\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\cos^{n-1}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi\\&=nabc\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\cdot\frac{1}{n+2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 2\pi\\&=\frac{4\pi}{n+2}abc\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right).\end{aligned}$$

五. (本题14分, 每小题 7 分) 设有平面向量场 $\vec{\mathbf{F}}=\left(\dfrac{-y}{a^2x^2+b^2y^2},\dfrac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\right)$, 其中 a,b 都是正实数.

(1) 求 $\vec{\mathbf{F}}$ 在区域 $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0\}$ 的所有势函数;

(2) 证明 $\vec{\mathbf{F}}$ 不是区域 $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^2>0\}$ 上的保守(有势)场.

解: (1)

$$\begin{aligned}\varphi(u,v)&=\int_{(1,0)}^{(u,v)}\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\int_{(1,0)}^{(u,0)}\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{(u,0)}^{(u,v)}\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^v\frac{u}{a^2u^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{ab}\arctan\frac{bv}{au}.\end{aligned}$$

故, 所求的势函数为 $\varphi(x,y)=\frac{1}{ab}\arctan\frac{by}{ax}+C$, 其中 C 是任意常数.

(2) 设 L 是逆时针方向的椭圆 $a^2x^2+b^2y^2=1$, 所围成的区域为 D, 则 D 的面积为 $\sigma(D)=\frac{\pi}{ab}$. 向量场 $\vec{\mathbf{F}}$ 沿 L 的第二型曲线积分为

$$\begin{aligned}&\oint_L\frac{-y}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}x+\frac{x}{a^2x^2+b^2y^2}\,\mathrm{d}y\\=&\oint_L -y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=2\sigma(D)=\frac{2\pi}{ab}\neq 0.\end{aligned}$$

故, $\vec{\mathbf{F}}$ 不是区域 $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2>0\}$ 上的保守(有势)场.

六. (10分) 设 $D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant R^2\}$, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数且满足 $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x+x^2+y^2$. 计算 $I=\iint\limits_D f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解: 设 $g(x,y)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{12}y^4$, 以及 $h(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$, 则有

$$\Delta h=\Delta f-\Delta g=\Delta f-(x+x^2+y^2)=0.$$

这说明 h 是 D 上的调和函数. D 的参数方程为 $x=r\cos\varphi,\ y=r\cos\varphi\ (0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$. 因此

$$\begin{aligned}\iint\limits_D h(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant R\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} h(r\cos\varphi,r\cos\varphi)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^R r\left(\int_0^{2\pi}h(r\cos\varphi,r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

记 $H(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}h(r\cos\varphi,r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. 设 L 是 D 的边界, 顺时针方向, 则

$$\begin{aligned}H'(r)&=\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi h'_x(r\cos\varphi,r\cos\varphi)+\sin\varphi h'_y(r\cos\varphi,r\cos\varphi)\right)\ \mathrm{d}\varphi\\&=\int_L -h'_y\,\mathrm{d}x+h'_x\,\mathrm{d}y &&\text{(二重积分转化为曲线积分)}\\&=\iint_D\left(h''_{xx}+h''_{yy}\right)\ \mathrm{d}\sigma &&\text{(Green 公式)}\\&=0.\end{aligned}$$

这说明 $H(r)$ 是常数. 因此 $H(r)=H(0)=2\pi h(0,0)$. 因此

$$\iint\limits_D h(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=h(0,0)\int_0^R r\,\mathrm{d}r=\pi R^2h(0,0)=\pi R^2f(0,0).$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D h(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D g(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi R^2f(0,0)+\iint\limits_D\left(x+x^2+y^2\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\pi R^2f(0,0)+\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi R^2f(0,0)+\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant R\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}}r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\&=\pi R^2f(0,0)+\frac{\pi}{2}R^4.\end{aligned}$$

七. (10分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, $D=\{(\theta,\varphi):\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\}$. 求证:

$$\iint\limits_D(\sin\theta+\cos\varphi)f(1-\sin\theta\cos\varphi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\pi\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 记 $B=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$. 考虑变换

$$x=\sin\theta\cos\varphi,\ \ y=\sin\theta\sin\varphi.$$

易知此变换将 D 映成 B, 且 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi\end{vmatrix}=\cos\theta\sin\theta$. 因此,

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(1-\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi&=\iint\limits_B\frac{f(1-x)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为对 $a>0$, 有 $\displaystyle\int_0^a\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$, 所以

$$\iint\limits_D f(1-\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

类似地, 考虑变换 $x=\sin\theta\cos\varphi,\ y=\cos\theta\cos\varphi$. 可得

$$\iint\limits_D f(1-\sin\theta\cos\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

上面两式相加解得所证.