

2025 USTC 数分 A1 期中

T1: $0 < \lambda < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + \lambda a_n + \lambda^2 a_{n-1} + \dots + \lambda^n a_1)$

T2: $f_n(x) = \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots + \sin^n x$

①: 证明 $f_n(x) - 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 中有唯一零点 x_n

②: 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

T3: $f(x), g(x)$ 均在 $\mathbb{R}$ 上一致连续且有界

求证 $f(x)g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续

T4: $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ g'(0) & x = 0 \end{cases} \quad g(0) = 1$

$g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导

求 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的连续性

T5: $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数

$0 < f(x+y) < f(x) + f(y)$

求证 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \inf \frac{f(x)}{x}$

T6: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导,

不存在 $f(x_0) = f'(x_0) = \infty$

求证: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有有限个零点.

T7: $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $y^{(n)}(0)$

T8: $f(x)$ 定义域 $(0, 1)$, 连续

且对 $\forall x \in (0, 1)$,

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} > 0$

求证: $f(x)$ 单调递增.



中国科学技术大学 2025—2026学年第一学期
数学分析A1期中考试解答

一、(10分)

设常数 λ 满足 $0 < \lambda < 1$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 。求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + \lambda a_n + \lambda^2 a_{n-1} + \cdots + \lambda^n a_1)$ 。

解答: 令

$$S_n = a_{n+1} + \lambda a_n + \lambda^2 a_{n-1} + \cdots + \lambda^n a_1 = \sum_{k=0}^n \lambda^k a_{n+1-k}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$ 。

设 $M = \sup |a_n|$, 则 $M < \infty$ 。考虑

$$\left| S_n - \frac{a}{1-\lambda} \right| = \left| \sum_{k=0}^n \lambda^k (a_{n+1-k} - a) + a \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k - \frac{1}{1-\lambda} \right) \right|.$$

由于

$$\sum_{k=0}^n \lambda^k = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}, \quad \left| \sum_{k=0}^n \lambda^k - \frac{1}{1-\lambda} \right| = \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \rightarrow 0,$$

且

$$\left| \sum_{k=0}^n \lambda^k (a_{n+1-k} - a) \right| \leq \sum_{k=0}^n \lambda^k |a_{n+1-k} - a|.$$

将和式分为两部分:

- 当 $k \leq n - N$ 时, $|a_{n+1-k} - a| < \varepsilon$, 该部分和 $\leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda}$;
- 当 $k > n - N$ 时, $|a_{n+1-k} - a| \leq 2M$, 该部分和 $\leq 2M \cdot \lambda^{n-N+1} \cdot \frac{1}{1-\lambda} \rightarrow 0$ 。

因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-\lambda}.$$

答案:

$$\boxed{\frac{a}{1-\lambda}}$$

二、(20分)

设 $f_n(x) = \sin x + \sin^2 x + \cdots + \sin^n x$, $n \geq 2$ 。

(1) 证明: $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有唯一解 x_n 。

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

解答:

(1) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $\sin x \in [0, 1]$ 。

若 $\sin x \neq 1$, 则

$$f_n(x) = \frac{\sin x(1 - \sin^n x)}{1 - \sin x}.$$

若 $\sin x = 1$, 则 $f_n(\frac{\pi}{2}) = n$ 。

令 $g_n(x) = f_n(x) - 1$, 则

- $g_n(0) = -1 < 0$;
- $g_n(\frac{\pi}{2}) = n - 1 > 0$ 。

由连续函数介值定理, 存在 $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $g_n(x_n) = 0$ 。

又

$$g'_n(x) = \cos x + 2\sin x \cos x + \cdots + n\sin^{n-1} x \cos x = \cos x(1 + 2\sin x + \cdots + n\sin^{n-1} x) > 0,$$

故 $g_n(x)$ 严格递增, 解唯一。

(2) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 若 $\sin x < 1$, 则

$$f_n(x) \rightarrow \frac{\sin x}{1 - \sin x}.$$

令 $\frac{\sin x}{1 - \sin x} = 1$, 解得 $\sin x = \frac{1}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 。

下证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{6}$ 。对任意 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时:

- 在 $[0, \frac{\pi}{6} - \varepsilon]$ 上, $f_n(x) < 1$;
- 在 $[\frac{\pi}{6} + \varepsilon, \frac{\pi}{2})$ 上, $f_n(x) > 1$ 。

故 $x_n \in (\frac{\pi}{6} - \varepsilon, \frac{\pi}{6} + \varepsilon)$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{6}$ 。

答案: $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

三、(10分)

已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界且一致连续。证明: $f(x)g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续。

证明: 设 $|f(x)| \leq M$, $|g(x)| \leq M$ 。

对任意 $\varepsilon > 0$, 由一致连续性, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - y| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

则

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $f(x)g(x)$ 一致连续。

四、(20分)

设函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶连续可导, 且 $g(0) = 1$, 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ g'(0), & x = 0. \end{cases}$$

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性。
(2) 求 $f'(x)$ 和讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性。

解答:

- (1) 由泰勒展开:

$$g(x) = 1 + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

则

$$g(x) - \cos x = g'(0)x + \left(\frac{g''(0)}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2),$$
$$f(x) = g'(0) + \left(\frac{g''(0)}{2} + \frac{1}{2}\right)x + o(x) \rightarrow g'(0) \quad (x \rightarrow 0).$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续。

- (2) 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{(g'(x) + \sin x)x - (g(x) - \cos x)}{x^2}.$$

当 $x = 0$ 时,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - \cos h - g'(0)h}{h^2}.$$

由泰勒展开,

$$g(h) - \cos h - g'(0)h = \left(\frac{g''(0)}{2} + \frac{1}{2}\right)h^2 + o(h^2),$$

故

$$f'(0) = \frac{g''(0) + 1}{2}.$$

再计算 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ 。由泰勒展开:

$$g(x) = 1 + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2),$$
$$g'(x) = g'(0) + g''(0)x + o(x),$$
$$\sin x = x + o(x),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

代入 $f'(x)$ 的分子:

$$\begin{aligned}& (g'(x) + \sin x)x - (g(x) - \cos x) \\&= (g'(0) + g''(0)x + x + o(x))x - \left(g'(0)x + \left(\frac{g''(0)}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2)\right) \\&= \left(\frac{g''(0)}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2).\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \frac{g''(0) + 1}{2} = f'(0),$$

即 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续。

五、(10分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且满足 $0 \leq f(x+y) \leq f(x)+f(y), \forall x, y \in [0, +\infty)$ 。

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 。

解答: 由次可加性, 对任意 $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} \geq \inf_{t>0} \frac{f(t)}{t}.$$

设 $\alpha = \inf_{t>0} \frac{f(t)}{t}$ 。

对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\theta > 0$ 使得 $\frac{f(\theta)}{\theta} < \alpha + \varepsilon$ 。

对任意 $x > 0$, 设 $x = n\theta + r, 0 \leq r < \theta$, 则

$$f(x) \leq nf(\theta) + f(r) \leq \frac{x}{\theta}f(\theta) + M,$$

其中 $M = \max_{0 \leq r \leq \theta} f(r)$ 。

故

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(\theta)}{\theta} + \frac{M}{x} \rightarrow \frac{f(\theta)}{\theta} < \alpha + \varepsilon.$$

因此,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \leq \alpha + \varepsilon \Rightarrow \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \leq \alpha.$$

又显然 $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \geq \alpha$, 故极限存在且等于 α 。

答案: $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}}$

六、(10分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可微, 且在 $[0, 1]$ 上没有点满足 $f(x) = f'(x) = 0$ 。证明: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至多只有有限个零点。

证明: 反证法: 假设有无限个零点 $\{x_n\} \subset [0, 1]$ 。

由紧性, 存在收敛子列 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [0, 1]$ 。

由连续性, $f(x_0) = 0$ 。

由可微性,

$$f'(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x_{n_k}) - f(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0.$$

故 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$, 矛盾。

七、(10分)

已知函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 求高阶导数 $y^{(n)}(0)$, n 是任意非零自然数。

解答: 令 $y = (1+x^2)^{-1/2}$ 。

由二项式展开:

$$(1+z)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} z^k, \quad \binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}.$$

故

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k}.$$

因此,

- 若 n 为奇数, 则 $y^{(n)}(0) = 0$;
- 若 $n = 2m$ 为偶数, 则

$$y^{(n)}(0) = (2m)! \cdot (-1)^m \frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} = (-1)^m \frac{((2m)!)^2}{2^{2m}(m!)^2}.$$

答案:

$$\boxed{0} \quad (n \text{ 为奇数}), \quad \boxed{(-1)^{n/2} \frac{(n!)^2}{2^n ((n/2)!)^2}} \quad (n \text{ 为偶数})$$

八、(10分)

设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 且对任意 $x \in (0, 1)$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} > 0.$$

证明: $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增。

证明: 反证法: 假设存在 $a < b$ 使得 $f(a) > f(b)$ 。

令 $u = \sup\{x \in [a, b] : f(x) > f(b)\}$ 。

由连续性, $f(u) = f(b)$, 且对任意 $x \in [a, u)$, $f(x) > f(b)$ 。

对 u , 取 $t > 0$ 充分小, 使得 $u-t \in [a, u)$, $u+t \in (u, b]$ 。

则

$$f(u+t) \leq f(b) = f(u) \leq f(u-t),$$

故

$$\frac{f(u+t) - f(u-t)}{t} \leq 0,$$

与条件矛盾。