

数学分析 A1. 2025 期末

T₁: ①: $f(x)$ 为 $2n$ 次多项式, 求 $\int f(x) \sin x dx$

②: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^3 x}{1 + \tan^3 x} dx$

③: $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$

④: $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周后图形表面积

T₂: $f(x) \in C^\infty(-1, 1)$, 对 $\forall x \in (-1, 1)$

$$|f^{(n)}(x)| \leq n! |x| \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

下证 $f \equiv 0$

T₃: $f(0) = f(2) = 1$ $|f'(x)| \leq 1$

下证 $1 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq 3$

T₄: $f(x)$ 在 $[A, B]$ 上可积, $(a, b) \subset [A, B]$,

$$F(h) = \int_a^b f(x+h) - f(x) dx$$

下求: $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$ 和 $f(x)$ 连续条件下 $F'(0)$

T₅: $f(x)$ 以 T 为周期, 有原函数 $F(x)$

下证 $\exists$ 以 T 为周期的 $g(x)$

$$\text{s.t. } F(x) = \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx\right)x + g(x)$$

T₆: $f \in C(-\infty, +\infty)$, $x > 0$ 时 $f(x) \geq \frac{1}{x}$

下证 f 无原函数

T₇: $f \in C(-\infty, +\infty)$ 有下界, $\exists a > 0$ s.t. $f(x) + a \int_{x-1}^x f(t) dt$ 为常值

下证 $f(x)$ 为常值



(Q1) (1) 设 $f(x)$ 为 $2n$ 次多项式, 求 $\int f(x) \sin x dx$ 。

解 反复分部积分并用 $f^{(k)} \equiv 0$ ($k > 2n$), 得

$$\int f(x) \sin x dx = \sin x \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f^{(2j+1)}(x) - \cos x \sum_{j=0}^n (-1)^j f^{(2j)}(x) + C.$$

(2) 计算 $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^3 x}{1 + \tan^3 x} dx$ 。

解 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$, 则 $\tan x = \cot t = 1/\tan t$, 从而

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^3 x} dx, \quad 2I = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}, \quad I = \frac{\pi}{4}.$$

(3) 计算 $J = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ 。

解 因 $1+x^4 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$, 且

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right),$$

并配方 $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = (x \pm \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}$, 故

$$J = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\arctan(\sqrt{2}(x + \frac{1}{\sqrt{2}})) + \arctan(\sqrt{2}(x - \frac{1}{\sqrt{2}})) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(4) 圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转一周, 求旋转曲面表面积。

解 参数化 $x = 2 + \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), 则 $ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = dt$, 绕 y 轴旋转面积

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi x ds = \int_0^{2\pi} 2\pi(2 + \cos t) dt = 8\pi^2.$$

(Q2) 已知 $f \in C^\infty(-1, 1)$ 且 $|f^{(n)}(x)| \leq n!|x|$, 证明 $f \equiv 0$ 。

证 由 $n=0$ 得 $f(0)=0$, 且对 $n \geq 1$ 有 $f^{(n)}(0)=0$ 。对固定 $x \in (-1, 1)$ 作0处泰勒展开并用拉格朗日余项:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) = R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

其中 ξ 介于0与 x 之间。由条件

$$|R_n(x)| \leq \frac{(n+1)!|\xi|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq |x|^{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

故 $f(x) = 0$, 任意 $x \in (-1, 1)$ 成立。

(Q3) 已知 $f \in C^1[0, 2]$, $f(0) = f(2) = 1$, 且 $|f'(x)| \leq 1$, 证明 $1 \leq \int_0^2 f \leq 3$ 。

证 由 $|f'| \leq 1$ 得对任意 $x \in [0, 2]$,

$$f(x) \geq f(0) - \int_0^x |f'| \geq 1 - x, \quad f(x) \geq f(2) - \int_x^2 |f'| \geq 1 - (2 - x) = x - 1,$$

故 $f(x) \geq \max(1 - x, x - 1) = |x - 1|$, 从而 $\int_0^2 f \geq \int_0^2 |x - 1| dx = 1$; 同理

$$f(x) \leq 1 + x, \quad f(x) \leq 1 + (2 - x) = 3 - x \Rightarrow f(x) \leq \min(1 + x, 3 - x) = 2 - |x - 1|,$$

$$\text{故 } \int_0^2 f \leq \int_0^2 (2 - |x - 1|) dx = 3.$$

(Q4) 设 f 在 $[A, B]$ 上可积, $(a, b) \subset (A, B)$, $F(h) = \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx$ 。

(1) 求 $\lim_{h \rightarrow 0} F(h)$ 。

解 变元代换得

$$F(h) = \int_b^{b+h} f(t) dt - \int_a^{a+h} f(t) dt.$$

因 f 在闭区间上可积从而有界: $|f| \leq M$, 故 $|F(h)| \leq 2M|h| \rightarrow 0$, 即 $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = 0$ 。

(2) 若 f 在 $[A, B]$ 上连续, 求 $F'(0)$ 。

解 由上式

$$\frac{F(h)}{h} = \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt.$$

由积分第一中值定理, 存在 $\xi_h \in [b, b+h]$ 、 $\eta_h \in [a, a+h]$ 使右端等于 $f(\xi_h) - f(\eta_h)$; 令 $h \rightarrow 0$ 并用连续性得 $F'(0) = f(b) - f(a)$ 。

(Q5) 设 f 为非常值连续周期函数 (周期 $T > 0$), $F' = f$, 令 $c = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, 证明 $F(x) - cx$ 以 T 为周期。

证 记 $g(x) = F(x) - cx$, 则

$$g(x+T) - g(x) = F(x+T) - F(x) - cT = \int_x^{x+T} f(t) dt - \int_0^T f(t) dt = 0,$$

其中用到 f 的周期性使 $\int_x^{x+T} f = \int_0^T f$ 。

(Q6) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 且当 $x > 0$ 时 $f(x) \geq \frac{1}{x}$, 证明 f 在 $\mathbb{R}$ 上无原函数。

证 反证。若存在 F 使 $F' = f$ 于 $\mathbb{R}$, 令

$$G(x) = F(x) - \ln x \quad (x > 0),$$

则 G 在 $(0, +\infty)$ 上可导, 且

$$G'(x) = F'(x) - \frac{1}{x} = f(x) - \frac{1}{x} \geq 0 \quad (x > 0),$$

故 G 在 $(0, +\infty)$ 上单调不减。于是对 $0 < a \leq 1$ 有 $G(a) \leq G(1)$, 即

$$F(a) - \ln a \leq F(1) - \ln 1 = F(1),$$

从而

$$F(a) \leq F(1) + \ln a \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} -\infty.$$

故 F 在 0 的右邻域内无下界, 与 F 在 0 处连续(更不用说可导)矛盾。故 f 在 $\mathbb{R}$ 上无原函数。

(Q7) 设 $a > 0$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且在 $\mathbb{R}$ 上有下界, 且存在 C 使

$$f(x) + a \int_{x-1}^x f(t) dt = C \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

证明 f 为常值。

证 令 $m = \inf_{\mathbb{R}} f \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - m \geq 0$ 且 $\inf_{\mathbb{R}} g = 0$ 。代入得

$$g(x) + a \int_{x-1}^x g(t) dt = C - m(1+a) =: A \quad (\forall x), \quad \Rightarrow A \geq 0. \quad (*)$$

设 $I(x) = \int_{x-1}^x g(t) dt$, 则 $I'(x) = g(x) - g(x-1)$, 对 $(*)$ 求导得

$$g'(x) + a(g(x) - g(x-1)) = 0.$$

令 $h(x) = e^{ax}g(x)$, 则

$$h'(x) = e^{ax}(ag(x) + g'(x)) = ae^{ax}g(x-1) \geq 0,$$

故 h 单调不减, 从而对 $t \in [x-1, x]$ 有 $e^{at}g(t) \leq e^{ax}g(x)$ 。于是由 $(*)$ 估计

$$A = g(x) + a \int_{x-1}^x e^{at}g(t)e^{-at}dt \leq g(x) + ae^{ax}g(x) \int_{x-1}^x e^{-at}dt = e^a g(x),$$

即 $g(x) \geq Ae^{-a}$ 。取下确界并用 $\inf_{\mathbb{R}} g = 0$ 得 $0 \geq Ae^{-a}$, 故 $A \leq 0$, 结合 $A \geq 0$ 得 $A = 0$ 。再由 $(*)$ 与 $g \geq 0$ 知 $g \equiv 0$, 即 $f \equiv m$ 为常值。