2025 极限理论（STAT5102P）期中考试（回忆版）*

授课教师：胡治水

2025 年 4 月 28 日 19:00-21:25†

1.（15 分）设 $X, X_1, X_2, \cdots$ 是一列两两独立且同分布的随机变量，$\mathbb{E}[X]=0$. 证明 $\mathbb{E}[|S_n/n|] \to 0$.

2.（15 分）设 $X, X_1, X_2, \cdots$ 是一列独立同分布的对称随机变量且 $\mathbb{P}(|X|>x)=x^{-3}$ $(x \geq 1)$. 证明存在正数序列 $\{c_n\}$ 使得 $S_n/c_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ 但 $S_n/c_n \to 0$ a.s. 不成立.

3.（16 分）设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列独立随机变量，$S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. 证明

$$\limsup_{n\to\infty} S_n/\sqrt{n} = +\infty, \text{ a.s.}$$

4.（18 分）设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列独立随机变量，$\sigma_n^2 := \mathrm{var}(\mathrm{X_n}) < \infty$. 证明：若 $\sum_{k=1}^n \sigma_k^{-2} \to \infty$，则

$$\left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^{-2}\right)^{-1} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mathbb{E}[X_k]}{\sigma_k^2} \to 0, \text{ a.s.}$$

5.（18 分）设 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列整数值随机变量. 证明：若对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 都有

$$\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k),$$

则 $X_n \xrightarrow{d} X$.

6.（18 分）定义函数类

$$\mathcal{G} = \{g: \ |g(x)-g(y)| \leq |x-y|, \ |g(x)| \leq 1\}.$$

证明：若 $X_n \xrightarrow{d} X$，则

$$\sup_{g\in\mathcal{G}} |\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]| \to 0.$$

*本次考试为开卷，可以携带任何纸质资料

†原定结束时间为 21:00，后延长