2025年线性代数(B2)期中考试回忆版

授课教师：陈洪佳、乐珏

2025年11月24日

一、(12分) 暂无

二、(10分) 设$A=(a_{ij})\in F^{n\times n}$, 它的$(i,j)$-元的代数余子式为$A_{ij}$. 取定$c\in F$, 证明：

$$\begin{vmatrix} c+a_{11} & c+a_{12} & \cdots & c+a_{1n} \\ c+a_{21} & c+a_{22} & \cdots & c+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c+a_{n1} & c+a_{n2} & \cdots & c+a_{nn} \end{vmatrix} = |A| + c\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} A_{ij}.$$

三、(23分) 考虑矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(1) 计算A的所有特征值和特征向量。

(2) 求A的一个满秩分解，即把A分解为满秩矩阵的乘积。

(3) 设$B\in F^{4\times 3}$, $C\in F^{3\times 4}$满足$BC=A$, 求所有可能的CB.

四、(15分) 设A是n阶复方阵，满足$|A|=18$, $3A+A^*=15I_n$.

(1) 求出A的一个零化多项式$f(\lambda)$.

(2) 求出A的最小多项式$d_A(\lambda)$.

(3) A是否可对角化？说明理由。

五、(20分) V是F上的n维线性空间，V上的线性变换$\mathcal{A}$满足$\dim\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A}=\dim\,\mathrm{Im}\,\mathcal{A}^2$. 证明：

(1) $V=\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}\oplus\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$.

(2) 若$\mathrm{Im}\,\mathcal{A}$是V的非零真子空间，则存在$\alpha\in V$使得子空间$W=(\mathrm{Im}\,\mathcal{A}+F\alpha)\cap(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A}+F\alpha)$的维数大于1. 试着给出$W$的一组基。

六、(12分) 设$\mathcal{A}$是n维复线性空间V上的线性变换。证明：$\mathcal{A}$的任意两个不变子空间都有包含关系，当且仅当$\mathcal{A}=\mathcal{N}+\lambda_0\mathcal{E}$, 其中$\mathcal{N}$为$n$次幂零变换，$\lambda_0\in\mathbb{C}$, $\mathcal{E}$为恒等变换。

七、(13分，含5分附加) 考虑n阶可逆实方阵$A=(a_{ij})$, $n\geq 2$, $a_{ij}>0$.

(1) 证明：A^{-1}的零元素个数不超过n^2-2n.

(2) 求出全体满足A^{-1}的零元素个数恰好为n^2-2n的方阵A^{-1}.