2025 线性代数 A2 期末考试
参考答案与评分标准

一、填空题 (选择 5 道题作答，多做不得分．每题 5 分，共 25 分．结果需化简．)

1. 设 H 是 Hermite 阵，则 iH 是 <u>B,C</u>（选出所有正确的选项）.

   (A) Hermite 方阵 (B) 反 Hermite 方阵 (C) 规范方阵 (D) 以上都不对

2. 实二次型 $Q(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2-(x+y+z)^2$ 的相合标准形或规范形是

   <u>$x^2+y^2-z^2$</u>.

3. 实方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$ 的全体奇异值是 <u>$\dfrac{\sqrt{105}+9}{2},\ \dfrac{\sqrt{105}-9}{2}$</u>.

4. 实数域 $\mathbb{R}$ 上张量积空间 $\mathbb{R}^2\otimes\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^4$ 的维数 = <u>24</u>.

5. $\mathbb{R}^{2025}\otimes\mathbb{R}^{2025}$ 中张量 $\sum\limits_{i=1}^{2024}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_{i+1}+\mathbf{e}_{i+1}\otimes\mathbf{e}_i)$ 的秩 = <u>2024</u>.

6. 用矩阵语言叙述命题“n 维线性空间 V 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的循环子空间的直和”.

   <u>$\mathscr{A}$ 在 V 的某个基下的矩阵形如 $\operatorname{diag}(A_1,\cdots,A_k)$，其中每个 A_i 都是友方阵.</u>

7. 用线性变换语言叙述命题“规范复矩阵可酉相似于对角阵”.

   <u>对于 n 维酉空间 V 上的规范变换 $\mathscr{A}$，V 可分解为两两正交的 1 维 $\mathscr{A}$ 不变子空间的直和.</u>

二、解答题（每题 15 分，共 75 分．需给出详细解答和证明过程.）

1. 求 2025 阶实方阵 $A=(a_{ij})$ 的 Jordan 标准形，其中 $a_{ij}=\begin{cases}0, & j\leqslant i+1;\\ 1, & j\geqslant i+2.\end{cases}$

   解答： $A=\sum\limits_{k=2}^{2024}J^k=J^2\sum\limits_{k=0}^{2022}J^k$，其中 $J=J_{2025}(0)$ 是 Jordan 块. (5 分)

   由 $\sum\limits_{k=0}^{2022}J^k$ 可逆，得 $\operatorname{rank}(A^k)=\max(0,2025-2k)$，$\forall k\in\mathbb{N}$. (5 分)

   根据 Weyr 特征，A 的 Jordan 标准形为 $\operatorname{diag}(J_{1013}(0),J_{1012}(0))$. (5 分)

2. 求 $f(x)=(Ax-b)^T(Ax-b)$ 的最小值，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$x\in\mathbb{R}^{3\times1}$.

   解答： $\operatorname{rank}(A)=2$．对 A 的列向量 $\alpha_1=(1,2,3)$，$\alpha_2=(2,3,4)$ 作标准正交化，得标准正交向量组 $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$，$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2)$. (9 分)

   $f(x)$ 的最小值 $=\|b-(\gamma_1\cdot b)\gamma_1-(\gamma_2\cdot b)\gamma_2\|^2=\|\frac{1}{6}(1,-2,1)\|^2=\frac{1}{6}$. (6 分)

3. 设实内积空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的内积 $(X,Y)=\mathrm{tr}(X^TY)$，其上线性变换 $\mathscr{A}(X)=PXP^{-1}$，其中 $P=J_n(1)$ 是 Jordan 块．求 $\mathscr{A}$ 的伴随变换 $\mathscr{A}^*$ 以及 $\mathscr{A}^*$ 的特征多项式．

解答：$(\mathscr{A}(X),Y)=\mathrm{tr}(P^{-T}X^TP^TY)=\mathrm{tr}(X^TP^TYP^{-T})$．得 $\mathscr{A}^*(Y)=P^TYP^{-T}$．(5 分)

$\mathscr{A}^*$ 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{nn}$ 下的矩阵 $B=P^T\otimes P^{-1}$． (5 分)

B 的特征值是 n^2 个 1．故 $\varphi_{\mathcal{A}^*}(x)=(x-1)^{n^2}$． (5 分)

4. 以下两题选做一题, 多做不重复计分:

(1) 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 上的线性变换，$\alpha\in V$ 使得 $V=\mathbb{F}[\mathscr{A}]\alpha$．求证：对于任意 $\mathscr{A}$-不变子空间 U，存在 $\beta\in U$ 使得 $U=\mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta$．

证明：若 $U=\{\mathbf{0}\}$，取 $\beta=\mathbf{0}$．下设 $U\neq\{\mathbf{0}\}$．任意 $u\in U$ 形如 $u=f_u(\mathcal{A})\alpha$，$f_u\in\mathbb{F}[x]$．设 $\mathbf{0}\neq\beta\in U$ 使得 $\deg(f_\beta)$ 最小．下证 $f_\beta\mid f_u$，$\forall u\in U$．从而 $u\in\mathbb{F}[\mathscr{A}]\beta$． (9 分)

否则存在 $u\in U$ 使得 $g=\gcd(f_\beta,f_u)$，$\deg(g)<\deg(f_\beta)$．设 $v=g(\mathscr{A})\alpha$．根据 Bezout 定理，$v=\lambda(\mathscr{A})u+\mu(\mathscr{A})\beta\in U$．与 $\deg(f_\beta)$ 的最小性矛盾． (6 分)

(2) 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 上的规范变换，$\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{A}$ 的伴随变换．求证：存在多项式 $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ 使得 $\mathscr{A}^*=p(\mathscr{A})$．

证明：任取 V 的标准正交基 S，$\mathscr{A}$ 在 S 下的矩阵 A 是规范实方阵，$\mathscr{A}^*$ 在 S 下的矩阵为 A^T．根据课本定理，$A=Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}$，其中 Q 是酉方阵，$\lambda_i\in\mathbb{C}$．(5 分)

(i) 不妨设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中所有互异元素．令 $p(x)=\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{i\neq j=1}^{k}\frac{x-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)\overline{\lambda_i}$．由 $p(\lambda_i)=\overline{\lambda_i}$，$\forall i$，得 $p(A)=A^H=A^T$，从而 $\mathscr{A}^*=p(\mathscr{A})$． (5 分)

(ii) 由 $\overline{\lambda_i}\in\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$，$\forall i$，得 $\overline{p(x)}=p(x)$ 即 $p\in\mathbb{R}[x]$． (5 分)

5. 设 n 阶实可逆矩阵 $A=\begin{pmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{pmatrix}$，其中 B_1 是 m 阶方阵，$B_1^TC_1+B_2^TC_2=O$．

(1) 证明：A 可分解为 $A=Q\,\mathrm{diag}(D_1,D_2)$，其中 Q 是正交阵，D_1 是 m 阶方阵．

(2) 证明：若 A 是正交阵，则 $\det(B_1)=\det(A)\det(C_2)$．

证明：(1) 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，$V_1=\mathrm{Span}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，$V_2=\mathrm{Span}(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)$．由题设知 $V_1\perp V_2$（标准内积）．分别求 V_1,V_2 的标准正交基，扩充为 U_1,U_2 的标准正交基，使得 $V_1\subset U_1$，$V_2\subset U_2$，$U_1\perp U_2$，$\dim U_1=m$，$\dim U_2=n-m$．设 $Q=\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\end{pmatrix}$，$Q_i$ 的列向量是 U_i 的标准正交基，则 $A=Q\,\mathrm{diag}(D_1,D_2)$． (9 分)

(2) 注意到 $\begin{pmatrix}I & O\\ C_1^T & C_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & C_1\\ O & I\end{pmatrix}$．等式两边求行列式． (6 分)