

线性代数 A1 期中考试

2025 年 5 月 8 日 9:45—11:45, 5102 教室

姓名_____ 学号_____ 得分_____

说明：禁止使用课本习题或其他参考书中的结论。

一、填空题。每空 5 分，共 25 分。结果需化简，直接写在空格处。

1. 在空间直角坐标系中，过 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 1, 2)$, $D(1, 1, 1)$ 的球面方程为

_____.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ i & 0 & i \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, i 是虚数单位, 则 $A^{2025} =$ _____

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, 则 $A^{-1} =$ _____

4. 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, 则 $\text{rank}(A) =$ _____.

5. $\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^4 & x^6 & x^8 \\ x^3 & x^6 & x^9 & x^{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{3 \times 4}$ 的 Smith 标准形为 _____

二、简答题。每题 6 分，共 30 分。判断下列叙述是否正确，并简要说明理由。

1. $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 有唯一的左逆当且仅当 A 有唯一的右逆.
2. 对于任意 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 存在 $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 使得 $B^2 + B = A$.
3. 对于任意 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det(A + B + AB) = \det(A + B + BA)$.
4. 对于任意 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $b \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, 线性方程组 $A^H A x = A^H b$ 有解.
5. 对于任意 $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $|\text{rank}(AB) - \text{rank}(AC)| \leq \text{rank}(B - C)$.

三、解答题。每题 15 分，共 45 分。需给出详细解答过程。

1. 求解 $\mathbb{R}$ 上线性方程组
$$\begin{cases} ax_1 - ax_2 + (a-1)x_3 = 1 \\ ax_1 - ax_2 + (1-a)x_3 = -1 \\ ax_1 + (a-1)x_2 - ax_3 = 1 \end{cases}$$

2. 设 $n = 2025$. 求所有 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得其伴随方阵 $A^* = A$.

3. 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 求证: $\text{rank}(I - A) + \text{rank}(A^2) = n$ 当且仅当 $A^2 = A^3$.

参考答案与评分标准

一、

$$\textcircled{1} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{11}{3}(x + y + z) + 8 = 0$$

$$\textcircled{2} 2^{1012}A$$

$$\textcircled{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{4} 2$$

$$\textcircled{5} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^3(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^6(x-1)(x^2-1) & 0 \end{pmatrix}$$

二、 每小题判断正误 1 分、理由 5 分.

1. 正确. A 有唯一左逆 $\Leftrightarrow XA = I_n$ 有唯一解 $\Leftrightarrow \text{rank}(A^T \ I_n) = \text{rank}(A^T) = m \Leftrightarrow A$ 是可逆方阵. 同理, A 有唯一右逆 $\Leftrightarrow AX = I_m$ 有唯一解 $\Leftrightarrow A$ 是可逆方阵.
2. 错误. 例如, 若 $B^2 + B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 则 $C = B + \frac{1}{2}I$ 满足 $C^2 = E_{12}$. 得 $\text{rank}(C) = \text{rank}(C^2) = 1$. 根据 Frobenius 秩不等式, $\text{rank}(C^k) = 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$. 与 $C^4 = O$ 矛盾.
3. 正确. $\det(I - (I + A)(I + B)) = \det(I - (I + B)(I + A))$.
4. 正确. 由 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^H A) \leq \text{rank}(A^H A \ A^H b) \leq \text{rank}(A^H) = \text{rank}(A)$, 得等号成立. 故 $A^H Ax = A^H b$ 有解.
5. 正确. $|\text{rank}(AB) - \text{rank}(AC)| \leq \text{rank}(AB - AC) = \text{rank}(A(B - C)) \leq \text{rank}(B - C)$.

三、

1. 线性方程组的系数矩阵 A 满足 $\det(A) = 2a(a-1)(2a-1)$. (5 分)
 当 $a \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ 时, 方程组有唯一解 $(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{a-1}(1, 1, 1)$. (4 分)
 当 $a = 0$ 时, $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = x_3 = -1$. (2 分)
 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}, x_3 = -2$. (2 分)
 当 $a = 1$ 时, 无解. (2 分)
2. (1) $A = O$, 满足题设. (2 分)
 (2) $1 \leq \text{rank}(A) \leq n-2$, 则 $A^* = O$, 矛盾. (2 分)
 (3) $\text{rank}(A) = n-1$, 则 $\text{rank}(A^*) = 1$, 矛盾. (2 分)
 (4) $\text{rank}(A) = n$. 由 $\det(A^*) = (\det(A))^{n-1}$, 得 $\det(A) = 1, A^* = A^{-1}, A^2 = I$. (4 分)
 因此, $A = P \begin{pmatrix} I_{n-2k} & O \\ O & -I_{2k} \end{pmatrix} P^{-1}$, 其中 P 是可逆实方阵, $k \in \mathbb{N}, k \leq 1012$. (5 分)
3. 由 $\begin{bmatrix} I & A^2 - I \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - A & O \\ O & A^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I + A \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ A - I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 - A^3 & O \\ O & I \end{bmatrix}$, (12 分)
 得 $\text{rank}(I - A) + \text{rank}(A^2) = \text{rank}(A^2 - A^3) + n$. (3 分)