中国科学技术大学数学科学学院

2024～2025 学年第 2 学期期末考试试卷

■ A 卷　　□ B 卷

课程名称	线性代数（A1）	课程编号	MATH1004
考试时间	2025 年 7 月 4 日	考试形式	闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

1a. (15 分) 设正整数 $n = 2m$. 设 F 是域. 令

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I_m & N \\ \mathbf{O} & \lambda I_m \end{pmatrix} :\ \lambda \in F,\ N \in F^{m\times m} \right\}.$$

证明 V 是 $F^{n\times n}$ 的子空间, 且对于 $A,\ B \in V$ 均有 $AB = BA$, 并求 $\dim_F V$.

证明. 说明 V 对加法和数乘封闭, 从而是 $F^{n\times n}$ 的子空间 (5 分); 验证对于 $A,\ B \in V$ 均有 $AB = BA$ (5 分); 求出 $\dim_F V = m^2 + 1$ (5 分). 均需要说明理由. □

1b. (15 分) 设 $A = J_{2025}(0)$ 是 Jordan 块. 求 A^{1000} 的 Jordan 标准形.

解答. 设 $B = A^{1000}$，则 I, B, B^2, B^3, B^4 的秩依次为 $2025, 1025, 25, 0, 0$。 (5 分)
从而 B 的 Joran 标准形由 975 个 $J_2(0)$ 和 25 个 $J_3(0)$ 构成。 (10 分) □

2 (15 分) 已知 $\mathbb{R}^5$ 中向量 $\mathbf{a}_1 = (1,1,1,1,1)^T$ 及 $\mathbf{a}_2 = (1,2,3,4,5)^T$. 试给出一个齐次线性方程组, 使得 $\mathbf{a}_1$ 与 $\mathbf{a}_2$ 为该方程组的基础解系.

证明. 这相当于求线性方程组 $\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 0,\ \mathbf{a}_2\mathbf{x} = 0$ 的基础解系. 知道要求解这个线性方程组得 5 分, 求解这个线性方程组, 并将结果按题意回答得 10 分. □

3a. (20 分) 设 $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$，定义线性变换 $\mathscr{A}:\ V \to V,\ A \mapsto A - A^T$.

(1) 求像空间 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 和核空间 $\ker\mathscr{A}$ 的基.

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量.

证明. (1) 和 (2) 各 10 分. □

3b.（20 分）设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 求证：若 $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ 是正定的，则 $\det(A) \geqslant \det(B)$，等号成立当且仅当 $A = B$.

证明. $A = B + C$，其中 $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ 是反对称的。由于 B 是正定的，存在复方阵 P 使得 $B = PP^H$，$C = P\operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)P^H$。 (10 分)

注意到 $C^H = -C$，得 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 的实部都是 0。又由于 $\pm\lambda_i$ 是成对出现的，故 $\det(A) = \det(B)\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i) \geq \det(B)$。 (5 分)

等号成立 $\Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$，即 $A = B$。 (5 分) □

4 (20 分) 对于正整数 $n \geq 2$, 考虑 n 阶实方阵 J_n 和 $n \times n$ 块方阵 M_n:

$$J_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_n = \begin{pmatrix} J_n & I_n & \cdots & I_n \\ I_n & J_n & \ddots & I_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ I_n & I_n & \cdots & J_n \end{pmatrix}.$$

(1) 求 J_n 的最小多项式.

(2) 证明: 对于整数 $k \geqslant 0$, M_n^k 形如 $\begin{pmatrix} A_k & B_k & \cdots & B_k \\ B_k & A_k & \ddots & B_k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ B_k & B_k & \cdots & A_k \end{pmatrix}$, 其中 A_k 和 B_k 均形如 $\lambda J_n + \mu I_n$，λ, μ 是整数.

(3) 求 M_n 的最小多项式.

证明. (1) 由于 $(J - I)^2 = n(J - I)$, 且 $J - I \neq 0$, $J - I - nI \neq 0$, 得 $d_J(x) = x^2 - (n+2)x + (n+1) = (x-1)(x-1-n)$. (5 分)

(2) 数学归纳法. (5 分)

(3) 可知 $(A_0, B_0) = (I, 0)$, $(A_1, B_1) = (J, I)$, $(A_2, B_2) = ((n+2)J - 2I, 2J + (n-2)I)$, $(A_3, B_3) = ((n^2+6n)J - 6nI, 6nJ + (n^2-6n)I)$. 由此可得 $M_n^3 - 3nM_n^2 + 2n^2M_n = 0$, 再看 $x^3 - 3nx^2 + 2n^2x$ 的真因子都不是 M_n 的化零多项式, 于是 $d_{M_n}(x) = x^3 - 3nx^2 + 2n^2x = x(x-n)(x-2n)$. (10 分)

另解： $M_n = I_n \otimes J_n + (J_n - 2I_n) \otimes I_n$ 可相似于对角阵

$$I_n \otimes \operatorname{diag}(n+1, 1, \cdots, 1) + \operatorname{diag}(n-1, -1, \cdots, -1) \otimes I_n.$$

M_n 的所有不同特征值为 $2n, n, 0$。故最小多项式为 $(x-2n)(x-n)x$。 □

5a. (10 分) 设线性变换 $\mathscr{A}: V \to V$ 在 V 的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 下的矩阵是 A. 设 $\mathscr{B}$ 是对偶空间 V^* 上的线性变换 $f \mapsto f \circ \mathscr{A}$. 求 $\mathscr{B}$ 在对偶基 $\{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*\}$ 下的矩阵.

证明. 由于 $\mathscr{A}(\alpha_j) = a_{1j}\alpha_1 + \cdots + a_{nj}\alpha_n$, 故

$$\mathscr{B}(\alpha_i^*)(\alpha_j) = \alpha_i^*(\mathscr{A}\alpha_j) = a_{ij}. \qquad (3\text{ 分})$$

这说明

$$\mathscr{B}(\alpha_i^*) = a_{i1}\alpha_1^* + a_{i2}\alpha_2^* + \cdots + a_{in}\alpha_n^*. \qquad (3\text{ 分})$$

从而

$$\mathscr{B}(\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*) = (\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*)A^T,$$

即 $\mathscr{B}$ 在对偶基 $\{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*\}$ 下的矩阵是 A^T. (4 分) □

5b.（10 分）求平面直角坐标系中的椭圆 $(x+y)^2 + (2x+y)^2 = 1$ 的半长轴和半短轴长.

解答. 椭圆方程 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ (3 分)，矩阵特征值 $\lambda = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$ (3 分)，半轴长 $= \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (4 分). □

6.（20 分）设 $A \in F^{n\times n}$，$1 \leqslant \operatorname{rank}(A) = r < n$. 证明：

(1) A 可在 F 上相似成 $\begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$ 形式，其中 $B \in F^{r\times r}$.

(2) 对于 A 与 (1) 给出的 B, 它们的最小多项式满足关系式 $d_A(x) = x d_B(x)$.

证明. (1) 根据相抵标准形，存在 F 上的可逆方阵 P, Q，使得
$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q = P \begin{pmatrix} B & C \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}$。 (8 分)

(2) 记 $M = \begin{pmatrix} B & C \\ O & O \end{pmatrix}$，$d_B(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$。一方面，由 $O = d_A(M) = \begin{pmatrix} d_A(B) & * \\ O & O \end{pmatrix}$，得 $d_A(x)$ 是 B 的化零多项式。故 $d_B(x) \mid d_A(x)$。 (3 分)

另一方面，由 $\sum_{i=0}^{k} b_i M^{i+1} = \sum_{i=0}^{k} b_i \begin{pmatrix} B^{i+1} & B^i C \\ O & O \end{pmatrix} = O$，得 $x d_B(x)$ 是 M 的化零多项式。故 $d_A(x) \mid x d_B(x)$。 (3 分)

当 $\det(B) \neq 0$ 时，$x \nmid d_B(x)$。由 $r < n$，得 $x \mid d_A(x)$。故 $d_A(x) = x d_B(x)$。 (3 分)

当 $\det(B)=0$ 时，$b_0=0$，$d_B(M)=\sum\limits_{i=1}^{k} b_i \begin{pmatrix} B^i & B^{i-1}C \\ O & O \end{pmatrix}$。注意到 $\begin{pmatrix} B & C \end{pmatrix}$ 是行满秩的。若 $d_B(M)=O$，则 $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i B^{i-1}=O$，与 $d_B(x)=\sum\limits_{i=1}^{k} b_i x^i$ 矛盾。故 $d_A(x)\neq d_B(x)$，只可能 $d_A(x)=x d_B(x)$。 (3 分) $\square$