2025年春季学期线性代数A1期末试题

考试时间：7月4日8:30-10:30

说明：若某题有a,b两个版本，则选择一个版本作答，多做不得分.

欧阳毅班a题，王新茂班b题

1a.(15分)设正整数$n=2m$.设F是域.令

$$V=\left\{\begin{pmatrix}\lambda I_m & N\\ \boldsymbol{O} & \lambda I_m\end{pmatrix}:\lambda\in F, N\in F^{m\times m}\right\}.$$

证明V是$F^{n\times n}$的子空间，且对于$A,B\in V$均有$AB=BA$，并求$\dim_F V$.

1b.(15分)设$A=J_{2025}(0)$是Jordan块.求A^{1000}的Jordan标准形.

2.(15分)已知$\mathbb{R}^{5\times 5}$中向量$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1,1,1)^T$及$\boldsymbol{a}_2=(1,2,3,4,5)^T$.试给出一个齐次线性方程组，使得$\boldsymbol{a}_1$与$\boldsymbol{a}_2$为该方程组的基础解系.

3a.(20分)设$V=\mathbb{R}^{2\times 2}$，定义线性变换$\mathscr{A}:V\to V.A\mapsto A-A^T$.

(1)求像空间$\mathrm{Im}\mathscr{A}$和核空间$\ker\mathscr{A}$的基.

(2)求$\mathscr{A}$的特征值与特征向量.

3b.(20分)设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，求证：若$B=\frac{1}{2}(A+A^T)$是正定的，则$\det(A)\geq\det(B)$，等号成立当且仅当$A=B$

4.(20分)对于正整数$n \geq 2$，考虑n阶实方阵J_n和块方阵M_n：

$$J_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}. \qquad M_n = \begin{pmatrix} J_n & I_n & \cdots & I_n \\ I_n & J_n & \ddots & I_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ I_n & I_n & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

(1)求J_n的最小多项式.

(2)证明：对于整数$k \geq 0$，M_n^k形如$\begin{pmatrix} A_k & B_k & \cdots & B_k \\ B_k & A_k & \ddots & B_k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ B_k & B_k & \cdots & A_k \end{pmatrix}$.其中$A_k$和$B_k$均形如$\lambda J_n + \mu I_n$，$\lambda, \mu$是整数.

(3)求M_n的最小多项式.

5a.(10分)设线性变换$\mathscr{A}: V \to V$在V的一组基$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$下的矩阵是$A$.设$\mathscr{B}$是对偶空间$V^*$上的线性变换$f \mapsto f \circ \mathscr{A}$.求$\mathscr{B}$在对偶基$\{\alpha_1^*, \cdots, \alpha_n^*\}$下的矩阵.

5b.(10分)求平面直角坐标系中的椭圆$(x+y)^2 + (2x+y)^2 = 1$的半长轴长和短半轴长.

6.(20分)设$A \in F^{n \times n}$，$1 \leq \mathrm{rank}(A) = r < n$.证明：

(1)A可在F上相似成$\begin{pmatrix} B & C \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$形式，其中$B \in F^{r \times r}$.

(2)对于A与(1)给出的B，它们的最小多项式满足关系式$d_A(x) = x d_B(x)$.