

USTC 2025 秋概率论期中试题 2025年11月07日

姓名:

学号:

分数:

1. (20分) 随机变量 X 的分布函数记为 $F(x)$.
 - (1) 证明 $F(x)$ 在 x_0 处连续当且仅当 $\mathbb{P}(X = x_0) = 0$;
 - (2) 写出两个随机变量, 一个的分布函数至少有三个不连续点, 另一个的则没有不连续点.
2. (15分) 若 $X = (X_{ij})$ 为 2×2 矩阵, 4 个矩阵元 $\{X_{ij}\}$ 为相互独立且与随机变量 Y 同分布, 当 Y 分别服从 $\{-1, +1\}$ 和 $[-1, 1]$ 上均匀分布时, 求概率 $p_2 = \mathbb{P}(\det(X) = 0)$.
3. (25分) 对联合离散型随机向量 (X, Y) , Y 关于 X 的条件方差 $\text{Var}(Y|X)$ 可定义为 Y 关于 X 的条件分布的方差, 即类似方差公式 $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ 可定义为

$$\text{Var}(Y|X) := \mathbb{E}[Y^2|X] - (\mathbb{E}[Y|X])^2.$$

(1) 证明

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X]).$$

- (2) 直线上简单随机游走 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, S_0 = 0$, 这里 $P(X_i = 1) = p, P(X_i = -1) = 1 - p, 0 < p < 1$, 对 $m \leq n$ 求协方差 $\text{Cov}(S_n, S_m)$ 与条件方差 $\text{Var}(S_n|S_m)$.
4. (15分) 令 X 和 Y 为独立的离散型随机变量, 且在 $\{0, 1, \dots, K-1\}$ 上均匀分布 ($K \geq 3$), 在取模 K 意义下试求 $Z_n = X + nY \pmod{K}$ 的分布列 ($0 \leq n \leq K-1$), 并进一步讨论 $\{Z_n\}$ 是否两两独立?
5. (25分) 非零随机变量 X 只取有限多个非负整数值, 其母函数 $G(z) = \mathbb{E}[z^X]$, 现定义两个概念: (i) 若复变量 z 的多项式方程 $G(z) = 0$ 的所有根均在单位圆周上, 则称 X 具有李-杨 (李政道-杨振宁) 性质; (ii) 若 $G(e^t) \leq e^{t\mathbb{E}[X] + t^2\text{Var}(X)/2}, \forall t \in (-\infty, \infty)$, 则称 X 服从严格次高斯分布. 试回答:
 - (1) 分别写出一个具有李-杨性质和严格次高斯分布的随机变量.
 - (2) 证明或举例说明 X 有李-杨性质与 X 服从严格次高斯分布是否相互蕴含?

