

中国科学技术大学

2025 - 2026 学年第一学期期中考试试卷

考试科目： 线性代数 (B1) 得分： _____

院、系： _____ 姓名： _____ 学号： _____

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、【每小题5分, 共30分】填空题:

1. 令 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. 则 $A^5 = \underline{\begin{pmatrix} 243 & 0 & 810 \\ 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}}$.

2. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, M_{ij} 表示 A 的余子式. 则 $M_{31} + M_{32} + M_{33} = \underline{-9}$.

3. 已知 A, B 是 4 阶方阵且 $\det(A) = -1, \det(B) = 0$. 设 $X = (A^*)^*$, 即 X 是 A 的伴随矩阵的伴随矩阵. 设 $Y = (B^*)^*$. 则 $\det(X - Y) = \underline{-1}$.

4. 已知向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 3), \alpha_2 = (2, 3, x), \alpha_3 = (0, 1, -4)$ 的秩为 2. 则 x 的值为 $\underline{10}$.

5. 三维数组空间中 $\beta = (1, -2, 4)$ 在基 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 3, 9), \alpha_3 = (1, -1, 1)$ 下的坐标是 $\underline{\left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{8}, \frac{15}{8}\right)}$.

6. 设 $\mathbb{R}_4[x]$ 为 $\mathbb{R}$ 上次数不超过 4 的多项式(含零多项式)全体, 按照多项式的加法和数乘运算构成的线性空间. 写出子空间 $V = \{f(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(0) = 0 \text{ 且 } f''(2) = 0\}$ 的一组基 $\underline{x, x^3 - 6x^2, x^4 - 24x^2}$. 这里 $f''(x)$ 表示二次导函数.

注意: 本题答案不唯一.

装订线 答题时不要超过此线

二、【每小题5分（判断正误2分，理由3分），共20分】

判断题：判断下列命题是否正确，并简要说明理由或举出反例.

1. 设 $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ 且 $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = 2$. 则 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$.

错误. 反例如下.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{秩为 } 2. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{秩为 } 1.$$

2. 设 A 是 2025 阶方阵. 则 $\text{rank}(A^{2025}) = \text{rank}(A^{2024})$.

错误. 反例. 设 $A = \sum_{j=1}^{2024} E_{j,j+1}$. 则 $A^{2024} = E_{1,2025}$, $A^{2025} = O$.

3. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in \mathbb{R}^6$ 线性无关, 则向量组 $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_5, \alpha_5 - \alpha_6, \alpha_6 + \alpha_1$ 也一定线性无关.

正确. 理由这里给出关键点供参考. 例如,

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3) + \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_4) + \frac{1}{2}(\alpha_4 - \alpha_5) + \frac{1}{2}(\alpha_5 - \alpha_6) + \frac{1}{2}(\alpha_6 + \alpha_1).$$

而 $\alpha_2 = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2)$, 再将上式带入替换第一个 α_1 . 其他都可依次类似得到.

4. 已知 α, β 是四维数组空间 $\mathbb{R}^4$ 中的两个不同的非零向量. 则 $\{\alpha, \alpha + \beta\}$ 一定是向量组 $\{\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta\}$ 的一个极大无关组.

错误. 反例 $\alpha = e_1, \beta = -e_1$.

院、系： _____

姓名： _____

学号： _____

三、【15分】考虑线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + cx_3 + 7x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = d \end{cases}.$$

问参数 c, d 为何值时, 该关于变量 x_1, x_2, x_3, x_4 的方程组无解? 有解? 并在有解的情况下, 分情况给出方程组的通解.

解: 对增广矩阵进行初等行变换可得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & c & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & c+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d+2 \end{pmatrix}.$$

因此, 当 $d \neq -2$ 时无解, 当 $d = -2$ 时有解.

当 $d = -2$ 且 $c = -8$ 时, 通解为
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{ 为数域中任意数}.$$

当 $d = -2$ 且 $c \neq -8$ 时, 通解为
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \text{ 为数域中任意数}.$$

四、【10分】设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. 求 A 的行列式 $\det(A)$, 并求 A 的逆矩阵 A^{-1} .

解: $S_{23}AS_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, 记为 $\begin{pmatrix} B & X \\ O & C \end{pmatrix}$, 为分块上三角型.

由于 $|S_{23}| = -1$, 则 $|A| = |S_{23}AS_{23}| = |B| \times |C| = (-1) \times (-1) = 1$.

由于 $S_{23}^{-1} = S_{23}$, 于是,

$$A^{-1} = S_{23}(S_{23}AS_{23})^{-1}S_{23} = S_{23} \begin{pmatrix} B & X \\ O & C \end{pmatrix}^{-1} S_{23} = S_{23} \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}XC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix} S_{23}.$$

计算可得 $B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $-B^{-1}XC^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

进而 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

院、系：_____ 姓名：_____ 学号：_____

五、【15分】设 $c, d \in \mathbb{R}$ 为参数. 设 $J = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, O 为二阶零方阵, I_2 是二阶单位矩阵. 设

$$A = \begin{pmatrix} J & O \\ O & I_2 \end{pmatrix}.$$

设 $V = \{B \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \mid AB = BA\}$. 这里 V 与参数 c, d 有关.

(1) 求证: 关于矩阵的加法和数乘运算下, V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

(2) 对参数 c, d 分类讨论, 分别回答对应情况下 V 的维数.

(1) 证明: V 作为 $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ 的非空子集, 易验证对任意 $B_1, B_2 \in V$ 及 $k \in \mathbb{R}$, 则有 $B_1 + kB_2 \in V$. 所以, V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

(2) 解: 设 $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$. 则 $AB = BA$ 当且仅当

$$\begin{pmatrix} cb_{11} + db_{21} & cb_{12} + db_{22} & cb_{13} + db_{23} & cb_{14} + db_{24} \\ cb_{21} & cb_{22} & cb_{23} & cb_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb_{11} & cb_{12} + db_{11} & b_{13} & b_{14} \\ cb_{21} & cb_{22} + db_{21} & b_{23} & b_{24} \\ cb_{31} & cb_{32} + db_{31} & b_{33} & b_{34} \\ cb_{41} & cb_{42} + db_{41} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}.$$

(i) 当 $c = 1$ 且 $d = 0$ 时, 有 $V = \mathbb{R}^{4 \times 4}$ (b_{ij} 不受约束), 从而 $\dim V = 16$.

(ii) 当 $c = 1$ 且 $d \neq 0$ 时, 有 $AB = BA \iff b_{21} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{41} = b_{11} - b_{22} = 0$. 从而 $\dim V = 10$.

(iii) 当 $c \neq 1$ 且 $d = 0$ 时, 有 $AB = BA \iff b_{13} = b_{14} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{32} = b_{41} = b_{42} = 0$. 从而 $\dim V = 8$.

(iv) 当 $c \neq 1$ 且 $d \neq 0$ 时, 有 $AB = BA \iff b_{21} = b_{13} = b_{14} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{32} = b_{41} = b_{42} = b_{11} - b_{22} = 0$. 从而 $\dim V = 6$.

六、【5分】设 A 是 n 阶方阵. 记号 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维列向量数组空间. 设 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 满足 $A^6\beta = \mathbf{0}$ 但 $A^5\beta \neq \mathbf{0}$, 这里 $\mathbf{0}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量. 求向量组 $S = \{\beta, A\beta, A^2\beta, A^3\beta, A^4\beta, A^5\beta\}$ 的秩.

解: 下证: 向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta, A^3\beta, A^4\beta, A^5\beta$ 线性无关.

假设 $k_0\beta + k_1A\beta + k_2A^2\beta + k_3A^3\beta + k_4A^4\beta + k_5A^5\beta = \mathbf{0}$ (1).

注意到当 $m \geq 6$ 时总有 $A^m\beta = \mathbf{0}$. 上面 (1) 式两边左边乘以矩阵 A^5 , 得 $k_0A^5\beta = \mathbf{0}$. 而 $A^5\beta \neq \mathbf{0}$, 从而 $k_0 = 0$.

带入 $k_0 = 0$, 于是 (1) 式变成 $k_1A\beta + k_2A^2\beta + k_3A^3\beta + k_4A^4\beta + k_5A^5\beta = \mathbf{0}$ (2).

上面 (2) 式两边左边乘以矩阵 A^4 , 同理可得 $k_1 = 0$. 依次同理类似操作可得 $k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$.

因此, 向量组 $\beta, A\beta, A^2\beta, A^3\beta, A^4\beta, A^5\beta$ 线性无关. 从而 $\text{rank}(S) = 6$.

院、系：_____ 姓名：_____ 学号：_____

七、【5分】设 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ 是参数.

考虑关于变量 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} c_1x_1 + 2c_2x_2 + 3x_3 + 2(c_3 + c_4)x_4 + 23x_5 = d_1 + d_2 - 1 \\ (c_1 - 5)x_1 + (c_5 + 3)x_2 + x_3 + c_3x_4 + (c_6 + 4)x_5 = d_1 - d_2 + 4 \\ c_7x_1 + 3x_2 + c_4x_4 + 6x_5 = d_3 - 3d_4 \\ (3c_7 - 2)x_1 + (c_2 + 3)x_2 + 2x_3 + d_1x_4 + d_2x_5 = d_3 \\ c_5x_2 + x_3 + (c_1 - c_2)x_4 + c_6x_5 = d_4 \end{cases}.$$

已知 $\xi_1 = (-10, -7, -2, 4, 4)^T$, $\xi_2 = (7, -2, 5, 3, -3)^T$, $\xi_3 = (21, 0, 6, -1, -4)^T$ 都是上述线性方程组的解. 求上述线性方程组的通解.

解: 令 $\eta_1 = \xi_1 - \xi_3 = (-31, -7, -8, 5, 8)^T$, $\eta_2 = \xi_2 - \xi_3 = (-14, -2, -1, 4, 1)^T$.

令 V 表示对应齐次线性方程组的解空间.

则 $\eta_1, \eta_2 \in V$, 且注意到 η_1, η_2 线性无关, 因此, $\dim V \geq 2$.

观察系数矩阵 A 的第 2, 3, 5 行, 第 2, 3, 5 列的三阶子式为

$$\begin{vmatrix} c_5 + 3 & 1 & c_6 + 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ c_5 & 1 & c_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ c_5 & 1 & c_6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

所以, 系数矩阵 A 的秩满足 $\text{rank}(A) \geq 3$, 从而 $\dim V = 5 - \text{rank}(A) \leq 2$.

综上, 可得 $\dim V = 2$. 于是, 题中线性方程组的通解为 $\xi_3 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, k_1, k_2 为数域中任意数.