

一、填空题 (5*6)

1. 已知三维欧氏空间有一组基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, 其度量矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则向量 $\beta = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$ 的长度为 $\sqrt{30}$.
2. 记 $\mathbb{P}_2[x]$ 为所有次数不超过二次的多项式全体按多项式加法、数乘所构成的线性空间, $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{P}_2[x]$ 上的线性变换, $\mathcal{A}(p(x)) = p'(x)$, 则线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征值 $\lambda = 0$, 属于特征值 λ 的特征子空间为 $\{c \mid c \in \mathbb{R}\}$.
3. 已知线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵表示为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\mathcal{A}$ 在基 $\{\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\}$ 下的矩阵表示为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
4. 已知三阶实方阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^* = -A^T$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, 且 $a_{11} = a_{12} = a_{13} = t < 0$, 则 $t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
5. 设二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + tx_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$ 的秩为 2, 则 $t = 5$, $Q(x_1, x_2, x_3)$ 的正惯性指数为 2.
6. 已知三阶实方阵 A 与三维向量 x 使得向量组 $\{x, Ax, A^2x\}$ 线性无关, 且 $A^3x = 3Ax - 2A^2x$, 则矩阵 A 的所有特征值为 $0, 1, -3$.

二、判断题 (5*4)

1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B 不相似。

错误。

理由: 矩阵 A 的特征值为对角线元素 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. 因为三个特征值互异, 所以 A 可以对角化. 对角化后的形式即为以特征值为对角元的对角矩阵, 即 B . 因此 $A \sim B$.

2. 若 A 为实对称方阵且 $\text{rank}(A) = r$, 则 A 可分解为 r 个秩为 1 的实对称方阵之和。

正确。

证明: A 为实对称矩阵, 故存在正交矩阵 P 使得 $P^TAP = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$, 其中 $\lambda_i \neq 0$.

则 $A = P\Lambda P^T = P(\sum_{i=1}^r \lambda_i E_{ii})P^T = \sum_{i=1}^r \lambda_i (PE_{ii}P^T) = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i p_i^T$, 其中 p_i 是 P 的第 i 列向量。

令 $A_i = \lambda_i p_i p_i^T$, 则 A_i 为实对称矩阵 (因为 $(p_i p_i^T)^T = p_i p_i^T$), 且 $\text{rank}(A_i) = 1$.

所以 $A = \sum_{i=1}^r A_i$.

3. 若二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$, 则 $Q(x_1, x_2, x_3)$ 正定。

错误。

反例: 取 $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, 则 $x \neq 0$, 但 $Q(1, 1, 1) = (1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (1 - 1)^2 = 0$. 正定要求对任意 $x \neq 0$, 都有 $Q(x) > 0$, 故该二次型只是半正定, 非正定。

4. 设 A 为 n 阶实方阵, 若对任意的 n 维向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x^T Ax = 0$, 则 $A^T = -A$ 。

正确。

证明: 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 考虑 $(x+y)^T A(x+y)$ 。

由已知条件, $(x+y)^T A(x+y) = 0$, 且 $x^T Ax = 0, y^T Ay = 0$ 。

展开得 $x^T Ax + x^T Ay + y^T Ax + y^T Ay = 0 \Rightarrow x^T Ay + y^T Ax = 0$ 。

注意 $y^T Ax$ 是一个数, 其转置等于自身, 即 $y^T Ax = (y^T Ax)^T = x^T A^T y$ 。

代入得 $x^T Ay + x^T A^T y = 0 \Rightarrow x^T (A + A^T) y = 0$ 。

因为此式对任意 x, y 成立, 取 $x = e_i, y = e_j$, 可得 $(A + A^T)_{ij} = 0$ 。

所以 $A + A^T = O \Rightarrow A^T = -A$ 。

三、计算与证明 (15*2+10*2)

1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中定义变换 $\mathcal{A}((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1 + 3x_2 - 3x_3, 3x_1 + x_2 - 3x_3, -x_3)^T$ 。

i. 证明: $\mathcal{A}$ 是线性变换。

证明:

设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{R}$ 。

由定义可知, 变换 $\mathcal{A}$ 可以写成矩阵乘法形式 $\mathcal{A}(x) = Ax$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

由于矩阵乘法满足线性性质, 即:

$$\mathcal{A}(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$$

$$\mathcal{A}(kx) = A(kx) = k(Ax) = k\mathcal{A}(x)$$

故 $\mathcal{A}$ 是线性变换。

ii. 求 $\mathcal{A}$ 在基 $e_1 = (1, 0, 0)^T, e_2 = (0, 1, 0)^T, e_3 = (0, 0, 1)^T$ 下的矩阵表示。

解:

将基向量代入变换:

$$\mathcal{A}(e_1) = (1, 3, 0)^T = 1e_1 + 3e_2 + 0e_3$$

$$\mathcal{A}(e_2) = (3, 1, 0)^T = 3e_1 + 1e_2 + 0e_3$$

$$\mathcal{A}(e_3) = (-3, -3, -1)^T = -3e_1 - 3e_2 - 1e_3$$

故矩阵表示为列向量组成的矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

iii. 是否存在 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵表示为对角矩阵? 若存在, 求出这组基, 否则, 给出不存在的理由。

解:

求矩阵 A 的特征值:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 & 3 \\ -3 & \lambda - 1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)[(\lambda - 1)^2 - 9] = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

令 $\det(\lambda I - A) = 0$, 解得特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$ 。

由于 A 有 3 个互不相同的特征值, 故 A 可对角化, 即存在这样的基。

求对应的特征向量:

a. 当 $\lambda_1 = -1$ 时, 求解 $(-I - A)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2, 5x_1 = 3x_3。$$

取特征向量 $\xi_1 = (3, 3, 5)^\top$ 。

b. 当 $\lambda_2 = 4$ 时, 求解 $(4I - A)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_3 = 0, x_1 = x_2。$$

取特征向量 $\xi_2 = (1, 1, 0)^\top$ 。

c. 当 $\lambda_3 = -2$ 时, 求解 $(-2I - A)x = 0$:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_3 = 0, x_1 = -x_2。$$

取特征向量 $\xi_3 = (1, -1, 0)^\top$ 。

故所求的基为 $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, 即 $\{(3, 3, 5)^\top, (1, 1, 0)^\top, (1, -1, 0)^\top\}$ 。

2. 记 $\mathbb{P}_2[x]$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上所有次数不超过二次的多项式全体按多项式加法、数乘所构成的线性空间。

对任意的多项式 $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2[x]$, 定义 $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)x^2 dx$ 。

i. 证明: $\langle p, q \rangle$ 是线性空间 $\mathbb{P}_2[x]$ 上的一个内积;

证明:

验证内积的三条公理:

a. **对称性:** $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)x^2 dx = \int_{-1}^1 q(x)p(x)x^2 dx = \langle q, p \rangle$ 。

b. **线性性:** $\langle k_1 p_1 + k_2 p_2, q \rangle = \int_{-1}^1 (k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x))q(x)x^2 dx = k_1 \int_{-1}^1 p_1(x)q(x)x^2 dx + k_2 \int_{-1}^1 p_2(x)q(x)x^2 dx = k_1 \langle p_1, q \rangle + k_2 \langle p_2, q \rangle$ 。

c. **正定性:** $\langle p, p \rangle = \int_{-1}^1 p^2(x)x^2 dx = \int_{-1}^1 (p(x)x)^2 dx \geq 0$ 。

当 $\langle p, p \rangle = 0$ 时, 由于被积函数 $(p(x)x)^2$ 连续非负, 故在 $[-1, 1]$ 上恒为 0, 即 $p(x)x = 0$ 。对于非零多项式 $p(x)$, $p(x)x$ 只有有限个零点, 不可能在 $[-1, 1]$ 上恒为 0。故 $p(x) \equiv 0$ 。

综上, $\langle p, q \rangle$ 定义了一个内积。

ii. 求内积 $\langle p, q \rangle$ 在基 $\{1, x, x^2\}$ 下度量矩阵 G ;

解:

令 $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = x, \epsilon_3 = x^2$ 。度量矩阵 $G = (g_{ij})_{3 \times 3}$, 其中 $g_{ij} = \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle$ 。

注意: $\int_{-1}^1 x^n dx = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & n \text{ 为偶数} \\ 0 & n \text{ 为奇数} \end{cases}$ 。

$$g_{11} = \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}。$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle 1, x \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \text{ (奇函数)}。$$

$$g_{13} = g_{31} = \langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}。$$

$$g_{22} = \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{2}{5}。$$

$$g_{23} = g_{32} = \langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^5 dx = 0 \text{ (奇函数)}。$$

$$g_{33} = \langle x^2, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^6 dx = \frac{2}{7}。$$

故度量矩阵 $G = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ 。

iii. 利用 Schmidt 正交化将基 $\{1, x, x^2\}$ 改造为关于内积 $\langle p, q \rangle$ 的一组标准正交基。

解：

记 $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$ 。

由度量矩阵可知, $v_2 = x$ 已经与 $v_1 = 1$ 和 $v_3 = x^2$ 正交 (因为 $g_{12} = g_{23} = 0$)。

a. 令 $u_1 = v_1 = 1$ 。

$$\|u_1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \frac{2}{3}。$$

$$\text{单位化: } e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}。$$

b. 令 $u_2 = v_2 = x$ (因为 $\langle x, 1 \rangle = 0$, 已正交)。

$$\|u_2\|^2 = \langle x, x \rangle = \frac{2}{5}。$$

$$\text{单位化: } e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot x = \frac{\sqrt{10}}{2} x。$$

c. 令 $u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2$ 。

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = \frac{2}{5}。$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \langle x^2, x \rangle = 0。$$

$$u_3 = x^2 - \frac{2/5}{2/3} \cdot 1 - 0 = x^2 - \frac{3}{5}。$$

计算 $\|u_3\|^2$:

$$\|u_3\|^2 = \langle x^2 - \frac{3}{5}, x^2 - \frac{3}{5} \rangle = \langle x^2, x^2 \rangle - 2 \cdot \frac{3}{5} \langle x^2, 1 \rangle + \frac{9}{25} \langle 1, 1 \rangle$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25}$$

$$= \frac{50-42}{175} = \frac{8}{175}。$$

$$\|u_3\| = \sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{175}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{14}}{35}。$$

$$\text{单位化: } e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{35}{2\sqrt{14}}(x^2 - \frac{3}{5}) = \frac{35}{2\sqrt{14}} \cdot \frac{5x^2-3}{5} = \frac{7(5x^2-3)}{2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}(5x^2-3)}{4}。$$

综上, 标准正交基为:

$$e_1(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$e_2(x) = \frac{\sqrt{10}}{2} x$$

$$e_3(x) = \frac{\sqrt{14}}{4} (5x^2 - 3)$$

3. 已知二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 2bx_2x_3$ 经正交变换 $X = PY$ 化为标准型 $Q(y_1, y_2, y_3) = y_2^2 + 2y_3^2$, 求参数 a, b 的值及所用的正交矩阵 P 。

解：

二次型对应的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$ 。

标准型 $y_2^2 + 2y_3^2$ 说明特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ 。

Step 1: 利用特征值求 a, b 。

由特征值性质:

$$\bullet \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow 1 + 1 + 1 = 0 + 1 + 2 = 3。(\text{满足})$$

$$\bullet \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0。$$

计算 $\det(A) = 0$:

$$\det(A) = 1(1 - b^2) - a(a - b) + 1(ab - 1) = 1 - b^2 - a^2 + ab + ab - 1 = -a^2 -$$

$$b^2 + 2ab = -(a - b)^2 = 0。$$

因此 $a = b$ 。

$$\text{设 } a = b, \text{ 则矩阵变为 } A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}。$$

利用特征多项式：特征值乘积两两之和等于 A 的二阶主子式之和。

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = 0 + 0 + 2 = 2。$$

$$\text{二阶主子式之和：} (1 - a^2) + (1 - 1) + (1 - a^2) = 2 - 2a^2。$$

$$\text{所以 } 2 - 2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0。$$

因此 $a = b = 0$ 。

Step 2: 验证并求特征向量。

$$\text{此时 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

$$\text{求特征值：} \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)[(\lambda - 1)^2 - 1] =$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)\lambda。$$

特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$ 。(与标准型一致)

求特征向量：

$$\text{i. } \lambda_1 = 0: (0I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = 0。$$

解得 $x_2 = 0, x_1 = -x_3$ 。取 $\xi_1 = (1, 0, -1)^\top$ ，单位化 $p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^\top$ 。

$$\text{ii. } \lambda_2 = 1: (I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0。$$

解得 $x_1 = 0, x_3 = 0, x_2$ 任意。取 $\xi_2 = (0, 1, 0)^\top$ ，已是单位向量 $p_2 = (0, 1, 0)^\top$ 。

$$\text{iii. } \lambda_3 = 2: (2I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0。$$

解得 $x_2 = 0, x_1 = x_3$ 。取 $\xi_3 = (1, 0, 1)^\top$ ，单位化 $p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^\top$ 。

Step 3: 构造正交矩阵 P 。

按特征值 0, 1, 2 的顺序排列列向量：

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{答案：} a = 0, b = 0, \text{ 正交矩阵 } P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}。$$

4. 设 A 是 n 阶实对称方阵，证明 A 为半正定方阵的充分必要条件为对任意的 n 阶半正定矩阵 B 满足 $\text{tr}(A^\top B) \geq 0$ 。

证明：

必要性： 设 A 为半正定矩阵，证明对任意半正定矩阵 B ，有 $\text{tr}(A^\top B) \geq 0$ 。

由于 A 是实对称半正定矩阵，存在实矩阵 C 使得 $A = C^\top C$ （半正定矩阵可分解）。

同理， B 是实对称半正定矩阵，存在实矩阵 D 使得 $B = D^\top D$ 。

因为 A 对称， $A^\top = A$ ，故

$$\text{tr}(A^\top B) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(C^\top C D^\top D)。$$

利用迹的性质 $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ ，令 $M = CD^\top$ ，则

$$\text{tr}(C^\top C D^\top D) = \text{tr}(DC^\top C D^\top) = \text{tr}((CD^\top)^\top (CD^\top)) = \text{tr}(M^\top M)。$$

$$\text{而 } \text{tr}(M^\top M) = \sum_{i,j} m_{ij}^2 \geq 0。$$

$$\text{故 } \text{tr}(A^\top B) \geq 0。$$

充分性： 设对任意半正定矩阵 B ，都有 $\text{tr}(A^\top B) \geq 0$ ，证明 A 为半正定矩阵。

对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ，令 $B = xx^\top$ 。

易验证 B 是半正定矩阵： $B^\top = (xx^\top)^\top = xx^\top = B$ （对称），且对任意 y ， $y^\top B y = y^\top x x^\top y = (x^\top y)^2 \geq 0$ 。

由条件， $\text{tr}(A^\top B) \geq 0$ 。

$$\text{计算 } \text{tr}(A^\top B) = \text{tr}(A^\top x x^\top)。$$

由于 A 对称， $A^\top = A$ ，故

$$\text{tr}(A^\top x x^\top) = \text{tr}(A x x^\top) = \text{tr}(x^\top A x) = x^\top A x。$$

（最后一步利用 $x^\top A x$ 是 1×1 矩阵，其迹等于自身）

因此 $x^\top A x \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立。

由半正定的定义， A 是半正定矩阵。

综上， A 为半正定方阵的充分必要条件为对任意的 n 阶半正定矩阵 B 满足 $\text{tr}(A^\top B) \geq 0$ 。 $\square$