

中国科学技术大学
2025-2026 学年泛函分析期中考试

考试时间：120 分钟 满分：110 分

姓名:		学号:		分数:	
-----	--	-----	--	-----	--

注意事项:

1. 答题前请将姓名、学号等个人信息填写清楚;
2. 请在试卷和答题纸上有用部分明确标注, 草稿纸不需要上交;
3. 请提供必要的推导过程 (第一题除外);
4. 允许使用课上讲过的所有定理和结论但需要准确陈述;
5. 有多个小问的题目如果你不会做某一问, 也可以在下一问中使用上一问的结论, 但请注明你使用了尚未证明的结论.

题 1 (20 分). 判断下面的命题是否正确, 不需要证明或给反例.

- (a) 度量空间中的压缩映射必有不动点.
- (b) 赋范线性空间的有限维线性子空间都是闭子空间.
- (c) Hilbert 空间中的有界闭集都是紧集.
- (d) 可分的 Hilbert 空间必有可数 Hamel 基.

题 2 (15 分). (a) 叙述一致有界原理 (无需证明).

- (b) 举例说明一致有界原理中完备性的假设不可缺少.

题 3 (15 分). 设 E 和 F 是 Banach 空间 X 的闭子空间且 $\dim(E) < \infty$. 证明 $E + F$ 是 X 的闭子空间.



题 4 (20 分). 给定 $0 < \alpha \leq 1$, 定义 $[0, 1]$ 上的 α -阶 Hölder 空间为:

$$C^{0,\alpha}[0, 1] := \{f \in C[0, 1] : [f]_\alpha < \infty\}.$$

进一步, 定义 $\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \|f\|_{\sup} + [f]_\alpha$, 其中

$$[f]_\alpha := \sup_{\substack{x, y \in [0, 1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

(a) 证明 $(C^{0,\alpha}[0, 1], \|\cdot\|_{C^{0,\alpha}})$ 是 Banach 空间.

(b) 证明 $C^{0,\alpha}[0, 1]$ 中任意 (关于 $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}}$) 有界序列有一致收敛 (关于 $\|\cdot\|_{\sup}$) 的子列.

题 5 (20 分). 给定指标 $1 \leq p < r \leq \infty$.

(a) 证明对任意 $f \in L^r[0, 1]$, 有 $\|f\|_p \leq \|f\|_r$, 由此推出 $L^r[0, 1] \subset L^p[0, 1]$.

(b) 证明 $F_n := \{f \in L^r[0, 1] : \|f\|_r \leq n\}$ 为 $L^p[0, 1]$ 中闭集.

(c) 证明 F_n 在 $L^p[0, 1]$ 中无内点, 由此推出 $L^r[0, 1]$ 为 $L^p[0, 1]$ 中第一纲集.

题 6 (20 分). 考虑如下 Haar 函数族 $(H_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2[0, 1]$:

$$H_0(t) := 1, \quad H_{2^j+k}(t) := \begin{cases} 2^{j/2}, & t \in [\frac{k}{2^j}, \frac{2k+1}{2^{j+1}}) \\ -2^{j/2}, & t \in [\frac{2k+1}{2^{j+1}}, \frac{k+1}{2^j}) \\ 0, & t \notin [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}), \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq k < 2^j.$$

(a) 证明 $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 构成 $L^2[0, 1]$ 中的规范正交集.

(b) 证明对任意 $f \in C[0, 1]$, $f_N := \sum_{n=0}^N \langle f, H_n \rangle_{L^2[0, 1]} \cdot H_n$ 一致收敛于 f , 当 $N \rightarrow \infty$.

(c) 利用 (a) 和 (b) 证明 $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 构成 $L^2[0, 1]$ 的规范正交基.

