中 国 科 学 技 术 大 学
2025–2026学年泛函分析期中考试

1. 判断题（每题 5 分, 共 20 分）**（需说明理由）**

(a) 在任意度量空间中, 开球都是开集.

(b) 完备度量空间的闭子集不一定是完备的.

(c) 有限维赋范线性空间都是Banach空间.

(d) 范数等价的赋范线性空间必然同构.

2. （15 分）

考虑实数集 $\mathbb{R}$, 对 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义 $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$.

(a) 验证 d 是 $\mathbb{R}$ 上的一个度量.

(b) 问: 在此度量 d 下, 点列 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$（即自然数列）是否是 Cauchy 列? 它是否收敛? 请说明理由.

(c) 证明或反驳: $(\mathbb{R}, d)$ 是完备的度量空间.

3. （15 分）

设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 是单位球面.

(a) 证明：如果 X 是严格凸的, 则 S 是 X 的极端子集（即 S 中的点不能表示为 S 中两个不同点的严格凸组合）.

(b) 举例说明一个赋范线性空间, 其单位球面 S 不是极端子集.

4. （20 分）

设 H 是内积空间, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 中的规范正交系.

(a) 证明 Bessel 不等式: 对任意 $x \in H$,有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \le \|x\|^2$.

(b) 证明：若 $\{e_n\}$ 是完备的（即 $\{e_n\}^{\perp} = \{0\}$）,则对任意 $x \in H$,有 Parseval 等式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2$ 成立,且 $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$（按范数收敛）.

5. （15分）

设 $C^1[0,1]$ 表示 $[0,1]$ 上所有连续可微函数构成的集合. 定义：

$$\|f\|_* = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

(a) 验证 $\|\cdot\|_*$ 是 $C^1[0,1]$ 上的范数.

(b) 问: 赋范线性空间 $(C^1[0,1], \|\cdot\|_*)$ 是否完备? 请证明你的结论.

6. （15 分）

设 X 是一个无限维 Banach 空间, 且 $C \subseteq X$ 是一个非空紧集. 证明 $\operatorname{int} C = \emptyset$.