中国科学技术大学
2025-2026 学年泛函分析期末考试（A卷）

考试时间：2026年1月11日，14:00-16:00

题 1 (10分). 设 H 是 *Hilbert* 空间，$M \subset H$ 是闭线性子空间。设 $x \in H$，y 是 x 在 M 上的正交投影，证明：对任意 $z \in M$，有 $\|x-y\| \leq \|x-z\|$。

题 2 (20分). 设 X, Y 是 *Banach* 空间，$T \in \mathcal{L}(X, Y)$。

1. 写出 T 的零空间 $N(T)$ 和值域 $R(T)$ 的定义。

2. 设 T 是单射且 $R(T)$ 闭，证明：存在常数 $c > 0$ 使得 $\|Tx\| \geq c\|x\|$ 对所有 $x \in X$ 成立。

3. 若 T 是满射，证明：存在常数 $C > 0$ 使得对任意 $y \in Y$，存在 $x \in X$ 满足 $Tx = y$ 且 $\|x\| \leq C\|y\|$。

题 3 (15分). 设 X 是 *Banach* 空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 中的序列。证明：若 $x_n \rightharpoonup x$，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，且 $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$。

题 4 (15分). 设 X, Y 是 *Banach* 空间，$T \in \mathcal{L}(X, Y)$。证明

$$\|T\| = \|T^*\| = \sup_{x \in B_X, y^* \in B_Y^*} |y^*(Tx)|.$$

这里 $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}, B_Y^* := \{y^* \in Y^* : \|y^*\| \leq 1\}$。

题 5 (20分). 如下定义算子 $A : \ell^2 \to \ell^2$:

$$A(x_1, x_2, x_3, \cdots) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots\right).$$

(1) 证明 A 是有界线性算子，并求 $\|A\|$。

(2) 证明 A 是紧算子。

(3) 求 A 的点谱 $\sigma_p(A)$。

(4) 求 A 的谱 $\sigma(A)$。

(5) 求 A 的谱半径。

题 6 (10分)**.** 设 X 为 *Banach* 空间。假设存在 X 的两个闭线性子空间 Y 和 Z，使得任意 $x \in X$ 有唯一表示 $x = y + z$，其中 $y \in Y$，$z \in Z$。证明存在常数 $C \geq 0$，使得对所有形如 $x = y + z \in X$ 的向量，均有 $\|y\| \leq C\|x\|$，$\|z\| \leq C\|x\|$。

题 7 (10分)**.** 设 X 为 *Banach* 空间。证明或否定：X 是无穷维的当且仅当 X 中任意完全有界集都是疏集（无处稠密集）。