2025 泛函分析 (H) 期末考试试卷

一. (15 分) 设 K 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的连续实值函数, 且

$$|K(x,y)|<1, \quad \forall\, 0\le x,y\le 1.$$

证明: 在 $[0,1]$ 上存在唯一的连续实值函数 f 使得

$$f(x)+\int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy=e^{x^2}, \quad \forall\, x\in[0,1].$$

二. (18 分) 设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可分 Hilbert 空间 H 中的一组正交规范基. 证明: 在 H 中 $x_n\to x$ $(n\to\infty)$ 当且仅当

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|=\|x\|$;

(2) 对每个 $m\in\mathbb{N}$, 均有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,e_m)=(x,e_m).$$

三. (17 分) 设

$$K(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n e^{2\pi i n(x+y)}, \quad 0\le x,y\le 1,$$

其中 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$ 满足

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|<+\infty.$$

定义 $L^2[0,1]$ 上的线性算子

$$T:\ u(x)\mapsto u(x)+\int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy, \quad \forall u\in L^2[0,1].$$

(1) 证明: T 是 $L^2[0,1]$ 上的 Fredholm 算子且 $\mathrm{ind}(T)=0$;

(2) 求 T 的谱 $\sigma(T)$ 和谱半径 $r_\sigma(T)$.

四. (17 分) 设 X 为 Banach 空间, 且 $P\in\mathcal{L}(X)$ 满足 $P^2=P$. 证明:

(1) P 是闭值域算子 (即 $R(P)$ 是闭子空间);

(2) 若 X 的子空间 M 满足存在 X 的有限维闭子空间 N 使得

$$X=M\oplus N,$$

则 M 必为闭子空间.

五. (15 分) 设 X,Y 是两个 Banach 空间. 如果映射 $A:X\times Y\to\mathbb{R}$ 按每个分量都是线性连续的, 证明: A 是连续的.

六. (18 分) 设 X 是一个实 Banach 空间, $f:X\to\mathbb{R}$ 是一个线性泛函, 且 $D(f)=X$. 如果记

$$N(f)=\{x\in X: f(x)=0\}.$$

证明: 或者 $N(f)$ 是 X 的闭子集, 或者 $N(f)$ 是 X 的一个稠密的真子空间.