2025-26年代数几何期末考试题

此为试卷，请把答案写在答题纸上(在答题纸上写上姓名、学号)，没有要求解释原因的给出答案即可！

1 (25分). 设$\mathbb{Z}$是整数环, $X = Spec\,\mathbb{Z}$是仿射概型, 设p是一个素数.

(1) 判断以下结论是否正确, 无需说明原因.

(a) $Spec\,\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$同构于$Spec\,\mathbb{Z}$的一个开子概型;

(b) $Spec\,\mathbb{Z}$的每个开子概型都是整概型;

(c) $Spec\,\mathbb{Z}$的每个真闭子概型对应的拓扑空间仅包含有限个点;

(d) $Spec\,\mathbb{Z}/(p^2)$有唯一的闭子概型.

(2) 证明: $X = Spec\,\mathbb{Z}$的每个开子概型是仿射概型.

(3) 设$\mathbb{Z}_{(p)}$为$\mathbb{Z}$在素理想(p)处的局部化, 自然环同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}$ 诱导态射 $j : T = Spec\,\mathbb{Z}_{(p)} \to Spec\,\mathbb{Z}$. 列举像集$Im(j)$的点, 并描述 $j_*\mathcal{O}_T$在$Spec\,\mathbb{Z}$ 上每一点处的茎(仅写结论).

2 (10分). 设X是拓扑空间, $\mathbb{Z}_X$为X上整系数的常值层, $\mathbb{Q}_X$为X上有理系数的常值层, $\mathcal{F}$是X上的层. 记 $Hom_X(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F})$ 是从$\mathbb{Z}_X$到$\mathcal{F}$的层同态集合.

(1) 建立以下集合之间的一一对应关系

$$Hom_X(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \leftrightarrows \mathcal{F}(X).$$

(2) 描述$Hom_X(\mathbb{Q}_X, \mathbb{Z}_X)$, 并做简要解释.

3 (25分). 设k是代数闭域, $\mathbb{P}^1_k$的齐次坐标为$[S, T]$, 设$t = T/S, s = 1/t$, $U = \{S \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1$其坐标为$t$, $V = \{T \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1$其坐标为$s$. 设$P = [1, 0]$, $Q = [1, 1] \in \mathbb{P}^1$.

(1) 描述可逆层$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(P + Q)$, 以及在点$P[1, 0]$和$[0, 1]$处的茎; (2) 写出线性空间$\mathcal{L}(P + Q)$的基;

(3) 构建一个具体的可逆层的同构$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(P) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(Q)$;

(4) 计算$div(dt)$并写出一个以P, Q为极点的有理微分.

4(10分). 设k是代数闭域, $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$为射影代数簇.

(1) 证明: 集合$\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{P}^n_k\} \subset \mathbb{P}^n_k \times \mathbb{P}^n_k$是一个闭集.

(2) 设U, V为X的仿射开集, 证明: $U \bigcap V$同构于$U \times V$的一个闭集, 从而是X的仿射开集.

5 (15分). 设A是一个交换幺环, 设M是一个A-模, 设$X = Spec(A)$是仿射概型.
设$\{D(f_i)\}_{i=1,2,\cdots,n}$是$X$的开覆盖. 证明: 序列$M \xrightarrow{\gamma_1} \prod_{i=1}^n M_{f_i} \xrightarrow{\gamma_2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} M_{f_i f_j}$是正合的

注: $\gamma_1 : x \mapsto (x)_{i=1}^n$, $\gamma_2 : (x_i)_{i=1}^n \mapsto (x_i - x_j)_{1 \leq i < j \leq n}$.

6(10分). 设$\mathbb{Z}$是整数环, $X = Spec\,\mathbb{Z}[x]$是仿射概型, 设p是一个素数, 令$Q = (x, p) \in X$.

(1) 说明Q是X的闭点, 列举X的两个非闭的点并描述它们的闭包(视为X的闭子概型).

(2) 令$V = X \setminus \{Q\}$. 计算$\mathcal{O}_X(V)$, 判断V是否为仿射概型并说明理由.

7(20分). 设k是代数闭域, $F(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$为$d$-次不可约齐次多项式, 令$x = X/Z, y = Y/Z$, $f(x, y) = F(x, y, 1)$. 令$C = V_p(F) \subset \mathbb{P}^2_k$, 以及$U = V(f(x, y)) \subset \mathbb{A}^2_k$. 假设$d > 1$.

(1) 证明: C可以分解为两个仿射开子簇的并集.

(2) 证明: 如果U是光滑的, 则$\Omega_{C/k}|_U$是自由层, 即存在$\omega \in \Omega_{C/k}(U)$使得$\Omega_{C/k}|_U = \mathcal{O}_U \cdot \omega$.

(3) 假设$d = 3$, 并且C包含一个奇异点. 证明: 存在双有理态射$\sigma : \mathbb{P}^1 \to C$. (提示: 首先说明$C$同构于一条由齐次多项式$G = ZG_2(X, Y) + G_3(X, Y)$定义的曲线)

注: 针对(2,3) 如果不能证明一般情形, 请写一个具体的例子并验证, 可获得部分分数.

8 请对老师和课程设置提出自己的建议, 比如部分内容的处理方案, 有限课时内需要加入或者删减的内容等.

①

1\. (1) (a) T. (b) T (c) T (d) F, 但有唯一的真闭子概型.

13分 有同学注意到空概型, 讨论也可以.

(2) 证明: 设 U 为 $\overset{X=}{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}}$ 的开集, 则 U 的补形如 $V(I)$.

5分 其中 $I \subseteq \mathbb{Z}$ 为理想, ~~故~~可设 $I=(d)$, $d \in \mathbb{Z}$

从而 $U = D_X(d) \cong \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_d$. $\mathbb{Z}$ 为PID.

(3) $\mathrm{Im}(j) = \{(p), (0)\}$, 注意: $\mathcal{O}_{T, p\mathbb{Z}_{(p)}} = \mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathcal{O}_{T,(0)} = \mathbb{Q}$.

7分 $(j_*\mathcal{O}_T)_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}$, $(j_*\mathcal{O}_T)_{(0)} = \mathbb{Q}$. ← 有理数域

当 $Q \in \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, $Q \notin \{(p),(0)\}$ 时, 要计算 $(j_*\mathcal{O}_T)_Q$,

取 Q 的邻域 V, 不妨设 $(p) \notin V$, 则: $j^{-1}V = \{(0)\}$

从而 $(j_*\mathcal{O}_T)(V) = \mathcal{O}_T(j^{-1}V) = \mathbb{Q}$

2\. (1) $\mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}_X, \mathcal{F}) \rightleftarrows \mathcal{F}(X)$

$\phi \longrightarrow \phi(1)$

$\phi_s: \mathbb{Z}_X \to \mathcal{F} \longleftarrow s$, 具体的: ~~若~~ U 为 X 的开集, $\{U_i\}_{i\in I}$ 为 U 的联通分支

$n \mapsto n\cdot s$ $\qquad \phi_s: \mathbb{Z}_X(U) = \prod_{i\in I} \mathbb{Z} \to \mathcal{F}(U) = \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$

$(n_i)_{i\in I} \longmapsto (n_i \cdot s)_{i\in I}$.

(2) 对 $\phi: \mathbb{Q}_X \longrightarrow \mathbb{Z}_X$

取 U 为连通开集. $\phi|_U: \mathbb{Q}_X(U) = \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}_X(U) = \mathbb{Z}$

加法群同态为平凡同态, 故 $\phi|_U = 0$

从而 $\mathrm{Hom}_X(\mathbb{Q}_X, \mathbb{Z}_X) = 0$.

②

3. (1) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P+Q)|_U = \mathcal{O}_U \cdot \frac{1}{t(t+1)}$ · $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P+Q)|_V = \mathcal{O}_V \cdot 1$

7

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P+Q)_{\cdot[1,0]} = k[t]_{(t)} \cdot \frac{1}{t}$ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P+Q)_{\cdot[0,1]} = k[S]_{(S)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P},[0,1]}$

7 (2) 一组基: $1, \frac{1}{t}=S, \frac{1}{t-1}$

(3) ~~$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P)$~~ 令 $U=\{S\neq 0\}$ $V'=\mathbb{P}^1\setminus\{P,Q\}=V\setminus\{S=1\}$

5

则 $\begin{cases}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P)|_U=\mathcal{O}_U\cdot\frac{1}{t}\\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P)|_{V'}=\mathcal{O}_{V'}\cdot 1\end{cases}$ $\begin{cases}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(Q)|_U=\mathcal{O}_U\cdot\frac{1}{t-1}\\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(Q)|_{V'}=\mathcal{O}_{V'}\cdot 1\end{cases}$ 均视为常值层 $k(t)$ 的子层.

事实上: $\phi: k(t)\to k(t)$ $f(t)\mapsto \frac{t}{t-1}f(t)$ 诱导 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(P)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(Q)$

具体: ϕ: $\mathcal{O}_U\cdot\frac{1}{t}\longmapsto\mathcal{O}_U\cdot\frac{1}{t-1}$, $\frac{1}{t}\mapsto\frac{1}{t-1}$

$\mathcal{O}_{V'}\cdot 1\longmapsto\mathcal{O}_{V'}\cdot 1$ $1\longmapsto\frac{t}{t-1}$

6 (4) $\operatorname{div}(dt)=-2[0,1]$. 可令 $\omega=\frac{1}{t(t-1)}dt$; 仅以 P, Q 为极点

4. (1) 证明: 设 $\mathbb{P}_k^n\times\mathbb{P}_k^n$ 齐次坐标为 $[X_0,\cdots,X_n]\times[Y_0,\cdots,Y_n]$

5

可以看出 Δ 由双齐次多项式组: $\{X_iY_j-X_jY_i\}_{i,j\in\{0,\dots,n\}}$

故 Δ 为闭集

~~(2) 注意到: $U\cap$~~ 或 Δ 为 $\mathbb{P}^n\xrightarrow{Id}\mathbb{P}^n$ 的像集 (Graph) 可由已知结论:

射影态射的像为闭集 得 Δ 为闭集

(2) 注意: $U\cap V\longrightarrow U\times V$ 的~~像集~~诱导了 $U\cap V\cong\Delta\cap(U\times V)$.

5

$x\longmapsto(x,x)$

5. 3 4 显然. $\operatorname{Im}(r_1) \subseteq \ker(r_2)$

另一方面. 设 $(\frac{m_1}{f_1^{k_1}}, \dots, \frac{m_n}{f_n^{k_n}}) \in \prod_{i=1}^{n} M$ $\ker(r_2)$

5 $\forall i,j$. $\frac{m_i}{f_i^{k_i}} - \frac{m_j}{f_j^{k_j}} = 0 \in M_{f_i f_j}$, 即 $\exists\, t_{ij}$. $(f_i f_j)^{t_{ij}}(f_j^{k_j} m_i - f_i^{k_i} m_j) = 0 \in M$.

利用 $D(f_i) = D(f_i^e)$, $\forall e \in \mathbb{Z}_+$. 可以把上式简化为

$(\frac{m_i}{f_i}) \in \ker(r_2)$, 且 $f_j m_i = f_i m_j$

5 由于 $\cup D(f_i) = X$. 则 $\exists\, h_i \in A$, 使得 $1 = \sum_{i=1}^{n} h_i f_i$

1 令 $m = \sum h_i m_i$, 则 $f_j m = \sum f_j h_i m_i = \sum f_i h_i m_j = m_j$, 即 $m = \frac{m_j}{f_j} \in M_{f_j}$

(详细可见第九周作业答案与 Hartshone 2.3 节 Prop 2.2 的证明)

6. (1) 3 $\mathbb{Z}[x]/(x,p) \cong \mathbb{Z}/(p)$ 是一个域, 于是 Q 为极大理想, 对应着 X 上的一个闭点.

3 (0) 非闭. $\overline{\{(0)\}} = X$ (x) 非闭. $\overline{\{x\}} \cong \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]/(x) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ (其他的也可以)

(2) $D(x) \subseteq V$, $D(p) \subseteq V$. , $V = D(x) \cup D(p)$

$\mathcal{O}_X(D(x)) = \mathbb{Z}[x]_x$, $\mathcal{O}_X(D(p)) = \mathbb{Z}[x]_p$

3 $\mathbb{Z}[x]_x \cap \mathbb{Z}[x]_p = \mathbb{Z}[x]$.

根据层的粘合条件, $\mathcal{O}_X(V) = \mathbb{Z}[x]$. 若 V 是仿射代数簇. 则

由于 $i: V \longrightarrow X$ 诱导 $i^*: \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(V)$ 的同构. 根据作业 4.1 得 $X \cong V$

1 这与 i 为开嵌入矛盾. 于是 V 不是仿射代数簇.

7. 7 (1) $C = (C \cap U_0) \cup (C \cap U_1)$ $U_0 = \{X \neq 0\}$, $U_1 = \{Y \neq 0\}$

7 (2) $\Omega_{C/k}|_U = \frac{A dx \oplus A dy}{(f_x dx + f_y dy)}$, ~~令 $w = -y dx + x dy$. $\Omega_{C/k}|_U = \mathcal{O}_U \cdot w$. 为自由层~~.

(记 $A = \frac{k[x,y]}{f(x,y)}$), 需求 $w = g_1 dx + g_2 dy$ 使 $V(\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_1 & g_2 \end{vmatrix}, f) = \phi$.

此时 $A dx \oplus A dy = A(f_x dx + f_y dy) \oplus A \cdot w$.

由

由 $f(x,y) = 0$ 定义了光滑曲线. 可得: $V(f_x, f_y, f) = \phi$.

由 Hilbert 零点定理, 可知 $\exists\, u, v \in k[x,y]$ 使 $u f_x + v f_y \equiv 1 \pmod{f}$

可令: $w = -v dx + u dy$.

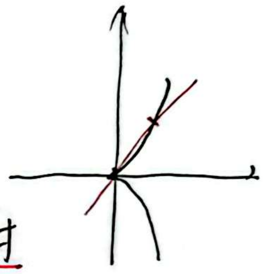
④

5. (3) 设 C 的奇点为 $[0,0,1]$.

6 此时 $f(x,y)=F(x,y,1)$ 不含非平凡线性部分.

可设 $f(x,y)=g_2(x,y)+g_3(x,y)$, 其中 $g_2, g_3 \in k[x,y]$ 分别为齐次2次、3次多项式

~~因~~为 $\mathbb{P}^1$ 为光滑射影曲线



C 为射影曲线;

要构造 $\mathbb{P}^1$ 到 C 的双有理态射 (2)

只需构造双有理映射 $\phi: \mathbb{A}^1 \dashrightarrow C$.

将 $x=\lambda y$ 代入 $f(x,y)=0$, 得: $f(\lambda y, y)=ay^2(y-h(\lambda))$, $h(\lambda)\in k[\lambda]$

令 $\phi: \mathbb{A}^1 \dashrightarrow C \cap \{z\neq 0\}$

$\lambda \longmapsto (\lambda h(\lambda), h(\lambda))$

$\phi^{-1}: C\cap\{z\neq 0\} \dashrightarrow \mathbb{A}^1$

$(x,y) \longmapsto x/y$.