

1(20分). 设 $i: \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ 是如下典范嵌入

$$i(\theta^1, \theta^2) = (x^1, x^2, x^3, x^4) := (\cos \theta^1, \sin \theta^1, \cos \theta^2, \sin \theta^2).$$

设 $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是映射

$$g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x^1, x^2, x^3, x^4) \mapsto (x^1(2+x^3), x^2(2+x^3), x^4).$$

(1) 对于任意 $p = (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{T}^2$, 给出 $\text{Im}(di)_p$ 的一组基.

(2) 给出 dg 的矩阵.

(3) 证明映射 $f = g \circ i: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 是否为单射?

(4) 给出 df 的矩阵.

(5) 证明映射 $f = g \circ i$ 是否为浸入? 是否为嵌入?

2(18分). 将单位球面 S^3 与范数为1的四元数的集合等同起来. 即

$$\{(a, b, c, d) \in S^3\} \cong \{q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : |q| = 1\}.$$

利用四元数乘法, S^3 是一个 Lie 群.

(1) 分别给出 Lie 群 S^3 的单位元 e ; $q = (a, b, c, d) \in S^3$ 的逆元 q^{-1} ; 乘积 $q_1 q_2$, 其中 $q_1 = (0, 0, 1, 0)$, $q_2 = (0, 0, 0, 1)$.

(2) $T_e S^3$ 有一组基 $\{e_1 = (0, 1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 0, 1)\}$. 求对应的左不变向量场在 $q = (a, b, c, d) \in S^3$ 处的取值 $\tilde{e}_i(q)$, $i = 1, 2, 3$.

(3) 求 Lie 括号 $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2]$, $[\tilde{e}_2, \tilde{e}_3]$, $[\tilde{e}_3, \tilde{e}_1]$.

3(18分). 设

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy) \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}).$$

(1) 计算 $d\omega$. (2) 计算积分 $\int_M \omega$. (3) 计算积分 $\int_N \omega$. 其中

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 2026\}, \quad N = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x-2026)^2 + y^2 + z^2 = 120\},$$

并且 M, N 的定向都通过它作为其包含的内部球体的边界给出.

4 (20分) 设 n 为正整数.

- (1) 证明 $\rho: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \rho(x) = -x$ 是否保持定向?
- (2) 求对径映射 $\rho: S^{2n} \rightarrow S^{2n}, \rho(x) = -x$ 的映射度.
- (3) 证明对径映射 $\rho: S^{2n} \rightarrow S^{2n}, \rho(x) = -x$ 是否保持定向?
- (4) 证明 $\mathbb{RP}^{2n}$ 是不可定向的.
- (5) 设光滑映射 $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ 的映射度 $\deg(f) \neq -1$, 证明 f 有至少一个不动点.

5(24分) 设 M 是 $m \geq 2$ 维连通的定向的紧光滑流形, $p \in M$.

- (1) 设 $m = 2$. 利用Mayer-Vietoris序列比较 $H_{dR}^1(M - \{p\})$ 与 $H_{dR}^1(M)$.
 - (2) 设 $m \geq 3$. 利用Mayer-Vietoris序列比较 $H_{dR}^{m-1}(M - \{p\})$ 与 $H_{dR}^{m-1}(M)$.
 - (3) 设 $n \geq 2$. $p, q \in \mathbb{R}^n$ 是不同的两点. 利用Mayer-Vietoris序列计算 $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}^n - \{p, q\})$.
- 构造 $\mathbb{CP}^2 - \{[0:0:1]\}$ 与 $\mathbb{CP}^1$ 之间的同伦等价.