

中国科学技术大学数学科学学院  
2025年秋季学期《微分几何》期中考试试卷

2025年11月 2 日, 9:30 - 11:30

姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

**注意事项和提示:**

1. 闭卷考试。请将解答写在试卷上。若写不下, 可写在试卷背面。考试结束后只交试卷。
2. 若曲面 $S$ 的参数表示为 $\mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , 则第一、第二基本形式的系数矩阵为

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

其中 $E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle$ ,  $F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle$ ,  $G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle$ ;  $L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle$ ,  $M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle$ ,  $N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle$ . 高斯曲率为 $K = \det II \cdot I^{-1}$ , 平均曲率为 $H = \frac{1}{2} \text{tr}(II \cdot I^{-1})$ .

3. 三角函数二倍角公式:  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ,  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$ .
4. 可能会用到下面这个不定积分

$$\int \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} du = a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{u}{a} + C.$$

**试卷正文 (共五题, 总分100分)**

1. [15 分] 圆滚线是一个单位圆周在一条直线上滚动时, 圆周上一个定点的轨迹。其参数表示为 $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
  - (a) 计算圆周滚动一圈时, 圆滚线的弧长。
  - (b) 求圆滚线的Frenet标架和曲率。

解答:

- (a) 圆滚线滚动一圈, 对应 $t \in [0, 2\pi]$ .  $\mathbf{r}(t)$ 的切向量为 $\mathbf{r}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ , 有模长

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2 \sin \frac{t}{2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

从而滚动一圈的长度为

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8.$$

- (b) 单位切向量为

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} (1 - \cos t, \sin t) = \left( \sin \frac{t}{2}, \cos \frac{t}{2} \right).$$

单位法向量为

$$\mathbf{n} = \operatorname{rot}_{\frac{\pi}{2}} \mathbf{t} = \left( -\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \right).$$

记 $s$ 为曲线的弧长参数, 则 $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$ . 曲率为

$$\begin{aligned}\kappa &= \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{dt} \frac{dt}{ds}, \mathbf{n} \right\rangle \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \left\langle \frac{d\mathbf{t}}{dt}, \mathbf{n} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left\langle \left( \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}, -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \right), \left( -\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2} \right) \right\rangle \\ &= -\frac{1}{4 \sin \frac{t}{2}}.\end{aligned}$$

2. [15 分] 设曲面 $S$ 在 $p$ 点处的主曲率为 $\kappa_1, \kappa_2$ , 对应的主方向为 $e_1, e_2 \in T_p S$ . 记 $v(\theta) = \text{rot}_\theta e_1 \in T_p S$ 为切平面上将 $e_1 \in T_p S$ 逆时针旋转 $\theta \in (0, \pi)$ 角得到的单位切向量,  $\kappa_n(\theta) = \kappa_n(v(\theta))$ 为沿着 $v(\theta) \in T_p S$ 方向的法曲率.

(a) 证明:  $\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$ ;

(b) 证明曲面在 $p$ 点处的平均曲率 $H$ 满足 $H = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \kappa_n(\theta) d\theta$ .

解答:

(a)  $e_1, e_2$ 为主方向, 因此满足

$$\mathcal{W}(e_1) = \kappa_1 e_1, \quad \mathcal{W}(e_2) = \kappa_2 e_2.$$

设 $v(\theta) = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$ . 则法曲率为

$$\begin{aligned}\kappa_n(\theta) &= \langle \mathcal{W}(v(\theta)), v(\theta) \rangle \\ &= \langle \mathcal{W}(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle \kappa_1 e_1 \cos \theta + \kappa_2 e_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

(b) 直接计算

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \kappa_n(\theta) d\theta &= \int_0^\pi (\kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left( \kappa_1 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \kappa_2 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \pi + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \underbrace{\int_0^\pi \cos 2\theta d\theta}_{=0} \\ &= H\pi.\end{aligned}$$

3. [25 分] 设  $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  是正则曲线, 以  $s$  为弧长参数, 其曲率  $\kappa(s) \neq 0$ , 挠率  $\tau(s) \neq 0$ ,  $\forall s \in I$ . 如果存在另一条曲线  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  满足  $\forall s \in I$ ,  $\alpha(s)$  的主法线与  $\mathbf{r}(s)$  的主法线重合, 则称曲线  $\mathbf{r}$  为 Bertrand 曲线。此时,  $\alpha$  称为  $\mathbf{r}$  的 Bertrand mate, 可表示为

$$\alpha(s) = \mathbf{r}(s) + \rho(s)\mathbf{n}(s), \quad s \in I,$$

其中  $\mathbf{n}(s)$  为曲线  $\mathbf{r}$  的主法向量。若  $\mathbf{r}$  为 Bertrand 曲线, 证明:

- $\rho(s) = \rho$  是与  $s$  无关的常数;
- $\alpha$  的单位切向量  $\tilde{\mathbf{t}}$  与  $\mathbf{r}$  的单位切向量  $\mathbf{t}$  和副法向量  $\mathbf{b}$  满足  $\langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle = \text{常数}$ ,  $\langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{b} \rangle = \text{常数}$ ;
- 存在常数  $C$  使得  $1 - \rho\kappa(s) = C\rho\tau(s)$ ,  $\forall s \in I$ .
- 若  $\mathbf{r}$  有至少两条不同的 Bertrand mate, 则  $\mathbf{r}$  为圆柱螺线。

解答:

- (a) 求导

$$\alpha'(s) = \mathbf{t}(s) + \rho'(s)\mathbf{n}(s) + \rho(s)(-\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)).$$

由于  $\alpha(s)$  的主法向  $\tilde{\mathbf{n}}$  平行于  $\mathbf{r}(s)$  的主法向  $\mathbf{n}(s)$ , 因此

$$\rho'(s) = \langle \alpha'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \langle \alpha'(s), \tilde{\mathbf{n}}(s) \rangle = 0.$$

因此,  $\rho(s) = \rho$  与  $s$  无关。

- (b) 设  $\tilde{s}$  为  $\alpha$  的弧长参数, 则  $\frac{d\tilde{s}}{ds} = |\alpha'(s)|$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle &= \left\langle \frac{d}{ds} \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{t}}, \frac{d}{ds} \mathbf{t} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{d\tilde{s}} \tilde{\mathbf{t}} \frac{d\tilde{s}}{ds}, \mathbf{t} \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{t}}, \frac{d}{ds} \mathbf{t} \right\rangle \\ &= |\alpha'(s)| \langle \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{t}}, \kappa \mathbf{n} \rangle = 0, \end{aligned}$$

其中  $\tilde{\kappa}$  为曲线  $\alpha$  的曲率, 最后一个等式是因为  $\tilde{\mathbf{n}}(s) = \mathbf{n}(s)$ . 因此,  $\langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle$  是与  $s$  无关的常数。由于  $\langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{n} \rangle = 0$ , 进而有  $\langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{b} \rangle = \text{常数}$ 。

- (c) 由 (b) 和

$$\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = \frac{(1 - \rho\kappa(s))\mathbf{t}(s) + \rho\tau(s)\mathbf{b}(s)}{|\alpha'(s)|},$$

可得

$$\frac{1 - \rho\kappa(s)}{\rho\tau(s)} = \text{常数}.$$

- (d) 若  $\mathbf{r}$  有两条不同的 Bertrand 偶  $\alpha(s), \beta(s)$ , 则存在常数  $\rho_\alpha \neq \rho_\beta$  以及  $C_\alpha \neq C_\beta$  使得

$$1 - \rho_\alpha \kappa(s) = C_\alpha \rho_\alpha \tau(s), \quad 1 - \rho_\beta \kappa(s) = C_\beta \rho_\beta \tau(s).$$

对  $s$  求导后消去  $\rho_\alpha, \rho_\beta$  后得

$$-\kappa'(s) = C_\alpha \tau'(s), \quad -\kappa'(s) = C_\beta \tau'(s).$$

因此  $\kappa'(s) = \tau'(s) \equiv 0$ , 曲线为圆柱螺线。

4. [20 分] 设曲面 $S$ 有等温参数表示 $\mathbf{r}(u, v)$ , 即第一基本形式满足 $E = G, F = 0$ .

- (a) 证明:  $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 2EH\mathbf{n}$ , 其中 $\mathbf{n}$ 为曲面的单位法向量。  
 (b) 证明 悬链面 $\mathbf{r}(u, v) = (a \cosh v \cos u, a \cosh v \sin u, av)$ ,  $u \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R}$  和 正螺面 $\tilde{\mathbf{r}}(u, v) = (-a \sinh v \sin u, a \sinh v \cos u, -au)$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$  均为极小曲面。  
 (c) 证明 $\mathbf{r}_u = \tilde{\mathbf{r}}_v$ ,  $\mathbf{r}_v = -\tilde{\mathbf{r}}_u$ . 即悬链面和正螺面为共轭极小曲面。  
 (d) 对任意 $t \in \mathbb{R}$ , 证明 $\mathbf{r}^t = (\cos t)\mathbf{r} + (\sin t)\tilde{\mathbf{r}}$  为极小曲面, 其第一基本形式与 $t$ 无关。

解答:

(a) 由  $E = G, F = 0$ ,

$$II \cdot I^{-1} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

平均曲率 $H = \frac{1}{2}tr(II \cdot I^{-1}) = \frac{L+N}{2E}$ . 由此得

$$\langle \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle = 2EH. \quad (1)$$

对 $E = G, F = 0$ 求偏导,

$$\begin{aligned} E_u = G_u &\Rightarrow 2\langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u \rangle = 2\langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v \rangle \\ F_v = 0 &\Rightarrow \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v \rangle + \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv} \rangle = 0. \end{aligned}$$

结合两式得 $\langle \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u \rangle = 0$ . 类似可得 $\langle \mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v \rangle = 0$ . 因此,  $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} \parallel \mathbf{n}$ . 从而由(1),

$$\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 2EH\mathbf{n}. \quad (2)$$

(b) 计算

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0) \\ \mathbf{r}_v &= (a \sinh v \cos u, a \sinh v \sin u, a) \\ \tilde{\mathbf{r}}_u &= (-a \sinh v \cos u, -a \sinh v \sin u, -a) \\ \tilde{\mathbf{r}}_v &= (-a \cosh v \sin u, a \cosh v \cos u, 0). \end{aligned}$$

悬链面和正螺面的第一基本形式满足

$$\begin{aligned} E &= a^2 \cosh^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2 \sinh^2 v + a^2 = E. \\ \tilde{E} &= a^2 \sinh^2 v + a^2, \quad \tilde{F} = 0, \quad \tilde{G} = a^2 \cosh^2 v = \tilde{E}. \end{aligned}$$

因此均为等温参数表示。可验证 $\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv} = 0$  和  $\tilde{\mathbf{r}}_{uu} + \tilde{\mathbf{r}}_{vv} = 0$ , 从而均为极小曲面。

(c) 由(b)可得 $\mathbf{r}_u = \tilde{\mathbf{r}}_v$ ,  $\mathbf{r}_v = -\tilde{\mathbf{r}}_u$ .

(d) 由

$$\mathbf{r}_{uu}^t + \mathbf{r}_{vv}^t = \cos t (\mathbf{r}_{uu} + \mathbf{r}_{vv}) + \sin t (\tilde{\mathbf{r}}_{uu} + \tilde{\mathbf{r}}_{vv}) = 0,$$

知 $\mathbf{r}^t$ 为极小曲面。其第一基本形式系数为

$$\begin{aligned} E^t &= \langle \mathbf{r}_u^t, \mathbf{r}_u^t \rangle = \langle \cos t \mathbf{r}_u + \sin t \tilde{\mathbf{r}}_u, \cos t \mathbf{r}_u + \sin t \tilde{\mathbf{r}}_u \rangle \\ &= \cos^2 t \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle + \sin^2 t \langle \tilde{\mathbf{r}}_u, \tilde{\mathbf{r}}_u \rangle + 2 \cos t \sin t \langle \mathbf{r}_u, \tilde{\mathbf{r}}_u \rangle \\ &= \cos^2 t \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle + \sin^2 t \langle -\mathbf{r}_v, -\mathbf{r}_v \rangle + 2 \cos t \sin t \langle \mathbf{r}_u, -\mathbf{r}_v \rangle \\ &= \cos^2 t E + \sin^2 t G - 2 \cos t \sin t F \\ &= (\cos^2 t + \sin^2 t) E = E. \end{aligned}$$

类似计算得 $G^t = G = E, F^t = 0$ . 因此 $\mathbf{r}^t$ 的第一基本形式与 $t$ 无关。

5. [25 分] 设  $xz$  平面上一条正则曲线  $C: (f(u), g(u))$  以  $u$  为弧长参数,  $f > 0$ , 将  $C$  绕  $z$  轴旋转一圈生成旋转曲面  $S$ , 其参数表示为  $\mathbf{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ .

- (a) 证明曲面  $S$  的主曲率为  $\kappa_1 = f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)$ ,  $\kappa_2 = \frac{g'(u)}{f(u)}$ ;  
 (b) 证明若  $g'(u) \neq 0$ ,  $\kappa_1$  可简化为  $\kappa_1 = -\frac{f''(u)}{g'(u)}$ ;  
 (c) 证明若  $S$  为旋转极小曲面, 则  $S$  为平面或悬链面 (即  $C$  为悬链线  $x = a \cosh \frac{z}{a}, a > 0$ ).

解答:

(a) 对  $\mathbf{r}$  求偏导

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u &= (f' \cos v, f' \sin v, g') \\ \mathbf{r}_v &= (-f \sin v, f \cos v, 0) \\ \mathbf{r}_{uu} &= (f'' \cos v, f'' \sin v, g'') \\ \mathbf{r}_{uv} &= (-f' \sin v, f' \cos v, 0) \\ \mathbf{r}_{vv} &= (-f \cos v, -f \sin v, 0).\end{aligned}$$

单位法向量为

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v|} = \frac{(-g' \cos v, -g' \sin v, f')}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}} = (-g' \cos v, -g' \sin v, f'),$$

这里用到了  $(f')^2 + (g')^2 = 1$ , 这是因为  $u$  为曲线  $C$  的弧长参数。由此可计算第一、第二基本形式的系数矩阵为

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}, \quad II = \begin{pmatrix} f'g'' - f''g' & 0 \\ 0 & fg' \end{pmatrix}.$$

Weingarten 变换的矩阵为

$$\mathcal{W} = II \cdot I^{-1} = \begin{pmatrix} f'g'' - f''g' & 0 \\ 0 & \frac{g'}{f} \end{pmatrix}.$$

主曲率为 Weingarten 变换的特征值,

$$\kappa_1 = f'g'' - f''g', \quad \kappa_2 = \frac{g'}{f}.$$

- (b) 若  $g'(u) \neq 0$ , 对  $\kappa_1$  可进一步化简: 对  $(f')^2 + (g')^2 = 1$  求导得  $f'f'' + g'g'' = 0$ , 从而

$$\kappa_1 = f'g'' - f''g' = -f' \frac{f'f''}{g'} - f''g' = -\frac{f''}{g'} ((f')^2 + (g')^2) = -\frac{f''}{g'}.$$

- (c) 若  $g'(u) \equiv 0$ , 则  $g(u) \equiv z_0$  为常数。从而旋转曲面为平面。因此, 不妨设  $g'(u) \neq 0$ , 由连续性, 这在一个开区间内成立。由 (a) 可得平均曲率

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{f''}{g'} + \frac{g'}{f} \right).$$

$H \equiv 0$  等价于  $ff'' = (g')^2 = 1 - (f')^2$ . 进而有  $(f^2)'' = (2ff')' = 2(ff'' + (f')^2) = 2$ . 积分得

$$f^2(u) = u^2 + Au + B = \left(u + \frac{A}{2}\right)^2 + B - \frac{A^2}{4}, \quad A, B \text{ 为常数}.$$

由  $|f'(u)|^2 = 1 - |g'(u)|^2 < 1$  知  $B - \frac{A^2}{4} > 0$ . 对  $u$  做变换后, 可设  $f^2(u) = u^2 + a^2$ , 其中  $a > 0$ . 则

$$g'(u) = \pm \sqrt{1 - (f')^2} = \pm \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

积分得

$$g(u) = \int \pm \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \pm a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{u}{a} + b.$$

其中  $b$  为常数, 通过沿  $z$  轴平移曲线可设  $b = 0$ . 即曲线  $C$  满足

$$x = \sqrt{u^2 + a^2}, \quad z = \pm a \cdot \operatorname{arcsinh} \frac{u}{a}$$

消去  $u$  后  $x = a \cdot \cosh \frac{z}{a}$ . 即曲线  $C$  为悬链线。