一、简答（15分）

(1) 参数的无信息先验分布指什么？有哪些常用的无信息先验确定方法？

(2) 贝叶斯决策中后验风险与贝叶斯风险分别指什么？有何关系？

(3) MCMC方法中，判断一个链是否收敛有哪些方法？

(4) 模型选择准则中DIC，AIC，BIC各有什么特点与区别？

(5) 在非参数贝叶斯方法中，狄利克雷过程(DP)的作用是什么？其等价过程有哪些？

二、(20分)

设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为来自 $N(\theta,1)$ 的简单样本，先验分布为 $\theta\sim N(\theta_0,\tau^2)$，其中 θ_0,τ 已知.

(1) 求 θ 的95%可信区间，其是否为HPD可信区间？

(2) 采用0-1损失函数，求多重检验问题 $H_0:\theta\le 0$，$H_1: 0<\theta\le 5$，$H_2:\theta>5$ 的贝叶斯检验.

三、(30分)

设 $X\sim B(n,\theta)$，先验分布为 $\theta\sim Beta(a,b)$，密度为 $\pi(\theta)=\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}$

(1) 如果我们相信 θ 的先验均值在0.2附近，方差在0.02附近，给出 θ 先验分布中超参数 a,b 的合理值. 如果我们对 θ 没有先验偏好，此时 a,b 取何值？

θ 的MAP估计 $\hat\theta$ 如何受先验影响？

(2) 求假设检验问题 $H_0:\theta\le 0.2 \longleftrightarrow H_1:\theta>0.2$ 的贝叶斯因子(涉及具体积分值表示即可)

(3) 如果样本量 $n\to\infty$，证明 θ 具有后验相合性.

四、(20分)

假设简单样本 $X_1,\cdots,X_n\sim N(\theta,1)$. 取 θ 的先验为柯西分布 $C(0,5)$，其密度 $\pi(\theta)=\frac{1}{5\pi(1+(\theta/5)^2)}$

(1) 如果取损失函数为平方损失，求 θ 的贝叶斯解表达式.

(2) 设提议分布为正态分布 $N(\theta_t,\eta^2)$，写出计算后验均值的Metropolis-Hastings算法.

(3) 若(2)中的接受概率过高或过低，如何调整算法？合适的接受率应该在什么范围.

五、(15分)

考虑回归模型 $y_i=\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}+e_i$，$i=1,\cdots,n$

其中 $\sum_{i=1}^n y_i=0$，$\sum_{i=1}^n x_{ij}=0$，$j=1,2,3$. $e_1,\cdots,e_n$ 为独立同分布 $N(0,\sigma^2)$ 误差.

(1) 若取 β_1,β_2,β_3 的先验独立同分布于 $N(0,\tau^2)$，τ^2 为已知数. σ^2 的先验为无信息先验，写出所有参数后验采样的Gibbs算法.

(2) 使用horseshoe先验，写出贝叶斯层级模型.