2024 春概率论进阶试题回忆

日期：2024 年 6 月 30 日

1. 一大段无关的阅读材料.

   (a) 举一个概率论和其他方向 (如代数, 分析, 几何, 信息, 物理等) 有关联的例子.

   (b) 写出一个随机变量, 其矩母函数只有纯虚数的零点.

2. 随机变量 X 有分布函数

$$\rho_{sc} = \sqrt{4-x^2}.$$

   计算其各阶矩并证明其确定该随机变量.

3. 计算 n 重正态分布 $N(\vec{\mu}, \Sigma)$ 的熵.

4. 设 $\vec{\sigma} \in 2^N, N \in \mathbb{Z}, d, \beta, h > 0$. 考虑 Hamilton 量:

$$H(\vec{\sigma}) = -\frac{d}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i,$$

   与 Curie-Weiss 模型:

$$\mu_{N,\beta,h} = \frac{1}{Z_{N,\beta,h}}e^{-\beta H(\sigma)},$$

   其中 $Z_{N,\beta,h}$ 是配分函数. 证明:

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\log(Z_{N,\beta,h}) = \max_{m\in[-1,1]}[\beta hm + \beta dm^2 + S(m)],$$

   其中 $S(m)$ 是熵:

$$S(m) = -\frac{1-m}{2}\log(\frac{1-m}{2}) - \frac{1+m}{2}\log(\frac{1+m}{2}).$$

5. 设 $\{X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n\}$ 是一列独立的随机变量, 其满足

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[Y_i], \mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{E}[Y_i^2].$$

   设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是三阶可微函数,$U = (X_1, \cdots, X_n), V = (Y_1, \cdots, Y_n)$. 证明: 对任意可微函数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $K > 0$, 都有

$$\begin{aligned} l|\mathbb{E}[g(f(U))] - \mathbb{E}[g(f(V))]| \le{}& C_1(g)\lambda_2(f)\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}[X_i^2 I_{|X_i|>K}] + \mathbb{E}[Y_i^2 I_{|Y_i|>K}]) \\ &+ C_2(g)\lambda_3(f)\sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}[|X_i|^3 I_{|X_i|\le K}] + \mathbb{E}[|Y_i|^3 I_{|Y_i|\le K}]). \end{aligned}$$

   其中

$$C_1(g) = \|g'\|_\infty + \|g''\|_\infty,$$
$$C_2(g) = \frac{1}{6}\|g'\|_\infty + \frac{1}{2}\|g''\|_\infty + \frac{1}{6}\|g'''\|_\infty$$
$$\lambda_r(f) = \sup\{|\partial_i^p f|^{\frac{r}{p}} : 1 \le i \le n, 1 \le p \le r\},$$

   为常数. 提示: 令

$$Z_i = (X_1, \cdots, X_i, Y_{i+1}, \cdots, Y_n), W_i = (X_1, \cdots, X_{i-1}, 0, Y_{i+1}, \cdots, Y_n),$$

   定义 $h(Z_i) = g(f(Z_i))$, 将 h 在 W_i 处对 $X_i\vec{e_i}$ 展开.

6. 设 $H_N=(h_{ij})$ 为 $N\times N$ 的矩阵,$\{h_{ij}:1\le i\le j\le N\}$ 为独立且同分布于随机变量 Y 的随机变量. 其中,Y 的奇阶矩为 0, 偶阶矩有界,$\mathbb{E}[Y^2]=1$. 定义

$$X_{k,N}=\frac{1}{N}\mathrm{Tr}[(\frac{H_N}{\sqrt{N}})^k],$$

$$\gamma_k=\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}[X_{k,N}].$$

(a) 写出 γ_k, 无需证明.

(b) 证明:$X_{k,N}$ 依概率收敛到 γ_k.

(c) 证明:$X_{k,N}$ 几乎处处收敛到 γ_k.