2024年大样本理论期末卷(回忆版)

本卷共五题，满分100分——回忆者注

另：一共70分课本原题，祝君好运:-)

一. (25') 设 Y 服从非中心卡方分布 $\chi^2_r(\lambda)$. (出处: Chap10 Ex 2)

(1) 求 EY 和 $\mathrm{Var}\,Y$.

(2) 求 $\frac{Y-EY}{\sqrt{\mathrm{Var}\,Y}}$ 的渐近分布.

二. (15') 设 X 是 $[a,b]$ 上的有界变量. $EX=\mu$. 令 $\phi(\lambda)=\log(Ee^{\lambda X})$.

(1) 求证: $\phi(0)=0$, $\phi'(0)=\mu$.

原试卷定义似乎是 $E_\lambda[f(X)]$, 总之不影响理解

(2) 求证 $\phi''(\lambda)=E_\lambda[X^2]-(E_\lambda[X])^2$, 其中 $E_\lambda[X]=\frac{E[Xe^{\lambda X}]}{E[e^{\lambda X}]}$.

(3) 求证 $E[\exp(\lambda(X-\mu))]\leq\exp\{-\frac{1}{2}\mu^2\sigma^2\}$. 其中 $\sigma=\frac{b-a}{2}$.

三. (25') 令 $X_1,X_2,\cdots$ i.i.d. , 均值为 μ, 方差为 τ^2. (出处: Chap11 Ex 4)

(a) 求 $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $\bar{Z}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iX_{i+1}$ 的联合分布.

(b) 求 $\bar{Z}_n-\bar{X}_n^2$ 的联合分布.

四. (20') Cauchy 分布 $C(\mu,\sigma)$: $f(x)=\frac{1}{\pi\sigma}\cdot\frac{1}{1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$. $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim f(x)$.

(出处: Chap13 Eg. 2)

(1) 求样本中位数 m_n 的渐近分布.

(2) 求 $\frac{X_{(\frac{3n}{4})}-X_{(\frac{n}{4})}}{2}-\sigma$ 的渐近分布.

五. (15') (1) 设 $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$, $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \cdots < Y_{(n)}$.

求证: $|X_{(k)} - Y_{(k)}| \leq \|X-Y\|_2$. $k=1, \cdots, n$.

(2) 若 $X \sim N(0,1)$, 求证: $P[|X_{(k)} - E(X_{(k)})| \geq \delta] \leq 2\exp\{-\frac{\delta^2}{2}\}$.