2024 秋几何学基础期中考试参考答案

申屠钧超 计科羽 姚一晨

2024 年 11 月 9 日

题目 1. 试求出下述平面与球相切于一点的系数的充分必要条件:

$$\Pi\colon ax+by+cz=0$$
$$\Sigma\colon x^2+y^2+z^2+2Dx+2Ey+2Fz+G=0,\quad (D^2+E^2+F^2-G>0).$$

解. 平面的法向量为 (a,b,c). 将球面方程改写为

$$(x+D)^2+(y+E)^2+(z+F)^2=D^2+E^2+F^2-G,$$

则这是以 $(-D,-E,-F)$ 为球心, 半径为 $\sqrt{D^2+E^2+F^2-G}$ 的球.

球心到平面 Π 的距离为

$$\frac{|Da+Eb+Fc|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

平面与球相切于一点, 等价于球心到平面的距离是球的半径, 即

$$\frac{|Da+Eb+Fc|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{D^2+E^2+F^2-G},$$

这就是所求的等价条件. ■

题目 2. 求证: 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ 共面当且仅当 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}=0.$

证明 1. 由第二次作业习题 10 的 (b), 我们知道

$$V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix},$$

其中 $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 表示三个向量的混合积. 于是 $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2=0$ 等价于 $V(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$ 等价于三个向量共面. ■

证明 2. 设 α,β,γ 是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, 向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 之间的夹角, 它们均介于 $[0,\pi)$, 则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2|\boldsymbol{c}|^2(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma).$$

($\Leftarrow$): 若 $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{c}|$ 中有 0, 则说明 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中存在零向量, 此时显然共面. 否则

$$\cos^2\alpha-2\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=0.$$

作为 $\cos\alpha$ 的方程解出

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma\pm\sin\beta\sin\gamma=\cos(\beta\pm\gamma),$$

结合 $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi)$, 得到 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ 或 $\alpha=\beta+\gamma$ 或 $\gamma=\alpha+\beta$ 或 $\beta=\alpha+\gamma$, 其中任意一种情形都蕴含 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三者共面.

($\Rightarrow$): 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中有零向量, 则行列式必为 0. 若不为零向量, 则 α,β,γ 必满足上述关系中的一个, 由此得到行列式为 0. ■

题目 3. 证明: 如果一个四面体有两对对棱互相垂直, 则第三对对棱也垂直, 并且三对对棱的长度的平方和相等.

证明. 设这个四面体的四个顶点为 A,B,C,D.

由第一次作业习题 8 的 (a), 我们知道 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. 进而两对对棱垂直蕴含第三对对棱垂直.

在上述假定下, 有

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2,\quad |\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2,\quad |\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2.$$

再根据

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD},\\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB},\end{aligned}$$

就得到三对对棱的长度的平方和相等. ■

题目 4. 设五点 $(-1,0),(0,1),(1,1),(0,t),(2,0)$ 经过一条抛物线, 求 t.

解. 设二次曲线的方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

代入五点, 解出系数得到

$$tx^2+(4t-4)xy+2y^2-tx+(2-2t)y-2t=0.$$

若方程表示抛物线, 则二次项的判别式 $\Delta=(4t-4)^2-8t=0$, 求得 $t=2,\frac{1}{2}$. 分别代入曲线方程得到

$$x^2+2xy+y^2-2x-2y-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2-2(x+y)-4=0$$

与

$$x^2-4xy+4y^2-x+2y-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2y)^2-(x-2y)-2=0.$$

两者都不是抛物线, 故不存在 t 满足题意. ■

题目 5. 1. 请举例 $\mathbb{R}^2$ 上的刚体变换 T 及子集 $S\subset\mathbb{R}^2$, 满足 $T(S)\subset S$ 但 $T(S)\neq S$. 另外是否能够找到满足这一条件的有界子集 S(如有请举例, 如无请给出证明)?
2. 设 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}^3$ 为不共面的四点, $y_1,y_2,y_3,y_4\in\mathbb{R}^3$. 求证: 存在唯一的满足 $T(x_i)=y_i, i=1,2,3,4$ 的仿射变换 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

证明. 1. 任取一个无理数 t, 取 $S=\{(\sin(2\pi nt),\cos(2\pi nt))|n=1,2,3,...\}$, T 为逆时针旋转角度 $2\pi t$. 则 $T(S)\subset S$, 且 $(\sin(2\pi t),\cos(2\pi t))\in S\backslash T(S)$.

2. **存在性**: 设将原点平移到 x_1 的映射为 T_{x_1}, 将原点平移到 y_1 的映射为 T_{y_1}. 由于平移是刚体变换, 自然为仿射变换, 于是我们可以先考虑 x_1,y_1 都为原点的情形.

记 $a_{i-1}=x_i-x_1, b_{i-1}=y_i-y_1, i=2,3,4$. 由于 x_1,x_2,x_3,x_4 不共面, 故 a_1,a_2,a_3 三个向量不共面, 因此对 $\forall x\in\mathbb{R}^3$, 存在唯一一组实数 u,v,w 使得 $x=ua_1+va_2+wa_3$. 定义映射

$$\tilde{T}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

$$ua_1+va_2+wa_3\mapsto ua_1+va_2+wa_3,$$

则 $\tilde{T}$ 将 a_1,a_2,a_3 分别映到 b_1,b_2,b_3, 且 T_1 为线性变换. 于是 $T=T_{y_1}\circ\tilde{T}\circ T_{-x_1}$ 就是所求的满足要求的仿射变换.

唯一性 (沿用“存在性”证明里的记号): 假设存在两个满足要求的仿射变换 T_1,T_2, 我们考虑 $\tilde{T}_i=T_{-y_1}\circ T_i\circ T_{x_1}$, $i=1,2$. 由 T_i 的定义知 $\tilde{T}_i$ 为线性变换, 且 $\tilde{T}_i(a_j)=b_j$, $i=1,2$, $j=1,2,3$. 则对任意 $x\in\mathbb{R}^3$,

$$\tilde{T}_i(x)=\tilde{T}_i(ua_1+va_2+wa_3)=u\tilde{T}_i(a_1)+v\tilde{T}_i(a_2)+w\tilde{T}_i(a_3)=ub_1+vb_2+wb_3.$$

因此对 $\forall x\in\mathbb{R}^3$, $\tilde{T}_1(x)=\tilde{T}_2(x)$. 故 $\tilde{T}_1=\tilde{T}_2$, 从而有 $T_1=T_2$. ■

题目 6. 设平面 $\mathbb{R}^2$ 中的圆 Γ 与两个圆 Γ_i: $x^2+y^2+2D_ix+2E_iy+F_i=0, i=1,2$ 都正交 (交点处切线垂直), 请证明 Γ 和 Γ_1,Γ_2 所生成的圆系, 即

$$k_1(x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+F_1)+k_2(x^2+y^2+2D_2x+2E_2y+F_2)=0$$

中的每一个圆都正交.

证明. 首先证明: 圆 Γ: $x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0$ 与圆 Γ': $x^2+y^2+2D'x+2E'y+F'=0$ 正交当且仅当 $F+F'=2DD'+2EE'$.

Γ 是以 $(-D,-E)$ 为圆心，半径为 $\sqrt{D^2+E^2-F}$ 的圆；Γ' 是以 $(-D',-E')$ 为圆心，半径为 $\sqrt{(D')^2+(E')^2-F'}$ 的圆. 它们正交当且仅当两圆心连线和两条半径构成以两圆心连线为斜边的直角三角形. 于是 $D^2+E^2-F+(D')^2+(E')^2-F'=(D-D')^2+(E-E')^2$, 整理得到结论.

回到原题. Γ 与 Γ_1,Γ_2 正交表明 $F+F_i=2DD_i+2EE_i, i=1,2$. $k_1+k_2\neq 0$ 时, 可以将圆系方程写为

$$x^2+y^2+2\frac{k_1D_1+k_2D_2}{k_1+k_2}x+2\frac{k_1E_1+k_2E_2}{k_1+k_2}y+\frac{k_1F_1+k_2F_2}{k_1+k_2}=0.$$

要证明 Γ 与圆系中的每一个圆都正交, 只需验证

$$F+\frac{k_1F_1+k_2F_2}{k_1+k_2}=2D\frac{k_1D_1+k_2D_2}{k_1+k_2}+2E\frac{k_1E_1+k_2E_2}{k_1+k_2}.$$

而这来源于

$$\begin{aligned}(k_1+k_2)F+k_1F_1+k_2F_2&=k_1(F+F_1)+k_2(F+F_2)\\&=k_1(2DD_1+2EE_1)+k_2(2DD_2+2EE_2)\\&=2D(k_1D_1+k_2D_2)+2E(k_1E_1+k_2E_2),\end{aligned}$$

两边同时除以 k_1+k_2 即可. ■