中国科学技术大学2024年春
复分析期中考试试卷

2024年5月12日

姓名：________ 系别：________ 学号：________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	总分
得分									
阅卷人									

1. (24分) 计算下列各题.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1} \bar{z}\mathrm{d}z$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1}\mathrm{d}z$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{|\mathrm{d}z|}{2z+1}$ (4) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{(z^3+1)(z-4)^2}\mathrm{d}z$

2. (14分) (1) 设 $u(x,y)=x^2-y^2-x+1$, 证明 $u(x,y)$ 为调和函数并求函数 $v(x,y)$ 使得 $u+iv$ 为全纯函数.

(2) 设 $u(x,y)$ 为单连通区域 D 上的调和函数，证明：存在 D 上的调和函数 $v(x,y)$ 使得 $u+iv$ 为全纯函数.

3. (12分) 将下列区域单叶全纯地映为单位圆盘.

(1) $\{z:-1<\mathrm{Im}z<1\}$; (2) $\{z:|z|<1,\mathrm{Im}z>0\}$.

4. (10分) 叙述最大模原理并利用其证明代数学基本定理.

5. (10分) (1) 证明：当 $z\in\mathbb{C}$ 时，$|e^z|\le e^{|z|}$.

(2) 设实数 $\lambda>1$, 证明：方程 $e^{z-\lambda}=z$ 在 $|z|<1$ 中有且仅有一个解.

6. (10分) 设 $f:B(0,1)\to B(0,1)$ 全纯且 $|f(0)|=r>0$. 证明：$f(z)$ 在 $B(0,r)$ 中没有零点.

7. (10分) (1) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中全纯且 $f(\frac{1}{n})=0$, $n=2,3,\cdots$, 证明 $f(z)$ 恒等于零;

(2) 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 中全纯且 $|f(\frac{1}{n})|\le e^{-n}, n=2,3,\cdots$, 证明 $f(z)$ 恒等于零.

8. (10分) 证明: 一个非常值整函数 f 不可能同时满足以下两个条件

(i) $f(z)=f(z+1), \forall z\in\mathbb{C}$.

(ii) $f(z)=f(z+i), \forall z\in\mathbb{C}$.