# 2024 复分析 H 期末记录

日期：2024 年 6 月 30 日

1. 计算
$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z.$$

2. 求出同时满足以下条件的共形变换 $f$:
   (a) $f$ 将 $D = \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| \le \frac{\pi}{2}, \Im z > 0.\}$ 映为上半平面.
   (b) $f(0) = 0, f'(0) = 1$.

3. 设 $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$.
   (a) 证明: 若 $f$ 无零点, 且在 $\partial B(0,1)$ 上有 $f \equiv 1$, 则 $f$ 为常数.
   (b) 求所有有零点且满足在 $\partial B(0,1)$ 上满足 $|f| \equiv 1$ 函数 $f$.

4. 若 $f$ 是整函数且将任意无界集映为无界集, 证明 $f$ 是多项式.

5. 若 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 是整函数, 且 $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, 证明 $a_n \in \mathbb{R}$.

6. (a) 叙述 Riemann 映照定理.
   (b) 设 $D \ne \mathbb{C}$ 为单连通区域, 且全纯映射 $f : D \to D$, 有存在点 $z_1, z_2$, 使 $f(z_1) = z_1, f(z_2) = z_2, z_1 \ne z_2$. 证明:$f(z) = z$.

7. 若实轴上的连续函数 $f$ 及其 Fourier 变换 $\hat{f}$ 均是紧支的, 则 $f \equiv 0$.

8. 利用整函数的 Hadamard 定理证明 $e^z = z$ 有无穷多个解.