2024 秋组合期末（中文版）

授课老师：马杰、张先得

1 第一题

(1) 将完全图 K_6 的各边划分成四个三角形和一个完美匹配。

(2) 设有一个对称设计 (v,k,λ)。若 $v>2k$，证明：$k>2\lambda$。

2 第二题

设 $\mathcal{F}\subset 2^{[n]}([n]:=\{1,2,\ldots,n\})$ 是一个集族。同时，不存在 $t+1$ 个集合 $F_i\in\mathcal{F}$ $(\forall i=0,1,2,\ldots t)$，让 $F_0\subsetneqq F_1\subsetneqq\ldots\subsetneqq F_t$。设 π 是 $[n]$ 的某个循环。

(1) 证明：若

$$\mathcal{F}_\pi=\{A\in\mathcal{F}\mid\ A\text{的元素连续地落在循环 }\pi\text{ 上}\},$$

则

$$\sum_{A\in\mathcal{F}_\pi}\frac{1}{|A|!(n-|A|)!}\le\sum_{i=1}^{t}\frac{n}{k_i!(n-k_i)!},$$

其中 $k_1,\ldots,k_t$ 是互不相同且让 $\sum_{i=1}^{t}\binom{n}{k_i}$ 最大的 t 个数。

(2) 证明：

$$|\mathcal{F}|\le\sum_{i=1}^{t}\binom{n}{k_i}.$$

3 第三题

设集族 $\mathcal{F}\subset\binom{[n]}{3}$，且 $\forall i\in[n]$，$\mathcal{F}$ 中恰好有 d 个集合含有 i。证明：存在集合 $A\subset[n]$，让 $|A|\ge\frac{2n}{3\sqrt{d}}$ 且 A 不包含 $\mathcal{F}$ 中任何集合。

4 第四题

设 $m(n)$ 为：在 n 维空间的单位球面 $S^{n-1}:=\{z\mid z\in\mathbb{R}^n,\ \|z\|=1\}$ 上满足两两之间的距离属于某个二元集合 $\{a,b\}$ 的点集的最大可能大小。

证明：

$$m(n)\in\left[\binom{n+1}{2},\frac{n(n+3)}{2}\right].$$

5 第五题

对所有 $m\ge2$，判断以下命题对错：

命题：存在偏序集合 $(P,\preceq)$ 让 P 大小为 m，且 P 可以划分为两个链 C_1, C_2（允许其中一个是空集）的不交并，但不能在划分为两个链 D_1, D_2（允许其中一个是空集）的不交并的同时使得 D_1 是 P 的最长链。

6 第六题

设 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ 是相交集族（也即 $\forall A, B \in \mathcal{F}$，$|A \cap B| \geq 1, |A| = |B| = k$），倘若它是极大的（也即：对 $\forall Q \in \binom{[n]}{k} - \mathcal{F}$，都有 $Q \cup \mathcal{F}$ 不是相交集），证明

$$|\mathcal{F}| \geq \frac{\binom{n}{k}}{1 + \binom{n-k}{k}}.$$

7 第七题

设图 G 满足 $\chi(G) = k \geq 1$，证明：任意的使得同颜色的点互不相连的 k 种颜色的染色下，存在路 $v_1 - v_2 - \ldots - v_k$，让 $\{v_i\}_{i=1}^{k}$ 被染不同颜色。