USTC 2024 数学夏令营试卷 (回忆版)

1 数学分析

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$. 求 f_x, f_{xy}.

2. 已知函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$, 判断其在 $(0,1)$ 上的收敛性和一致收敛性.

3. 利用二重积分计算 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{i^2+j^2}$.

4. (a) 已知函数 $f\in C^1[a,b]$, 且 $f(a)=0$, 证明: $\int_a^b f^2\leq\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b(f')^2$.
   (b) 已知函数 $f\in C^1(D)$, 其中 $D=[a,b]\times[c,d]$, 且 $f(x,c)=0$, 证明: $\int_D f^2\leq\frac{(c-d)^2}{2}\int_D(f_y)^2$.

5. (a) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是单位圆盘, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 且在 D 的边界上 $f(x,y)=0$, 证明: $\lim_{\varepsilon\to 0}-\frac{1}{2\pi}\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy=f(0,0)$, 其中 $D_\varepsilon=D-B_\varepsilon((0,0))$
   (b) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是单连通区域, 且原点 $(0,0)\in D$, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续的偏导数, 且在 D 的边界上 $f(x,y)=0$, 计算 $\iint_{D_\varepsilon}\frac{xf_x+yf_y}{x^2+y^2}dxdy$, 其中 $D_\varepsilon=D-B_\varepsilon((0,0))$

2 线性代数

1. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, 试求矩阵 U,D, 使得 $A=U'DU$.

2. 证明: n 阶复矩阵 A 是幂零矩阵当且仅当 $\mathrm{tr}(A^k) = 0, 1 \leq k \leq n$.

3. 对于 n 阶复矩阵 A, 定义 $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

   (a) 验证 e^A 定义的合理性.

   (b) 证明: 对于乘法交换的矩阵 A, B, 成立 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$. 对乘法不交换的矩阵, 试举出反例.

   (c) 证明: $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

4. 设 φ 是线性空间 V 上的幂零线性变换. 证明存在唯一的线性子空间链

$$\{0\} = W_{-l-1} \subset W_{-l} \subset \cdots \subset W_l \subset W_{l+1} = V,$$

   满足:

   (a) $\varphi(W_k) \subset W_{k+2}$.

   (b) $W_{k+1}/Wk \cong W_{-k}/w_{-k-1}$

   (疑似这两个条件, 记不太清了)

3 抽象代数

1. 写出 $Z_2 \oplus Z_8 \oplus Z_{24}$ 的不变因子和初等因子.

2. H, K 是 G 的正规子群, 满足 $HK = G$. 证明: $G/(H \cap K) \cong (G/H) \times (G/K)$.

3. 已知 $n \equiv 1 \mod 4, n \equiv 2 \mod 3, n \equiv 1 \mod 5$. 求 $n \equiv ? \mod 60$.

4. 证明有限交换幺环 R 的素理想都是极大理想.

5. 已知 $f(x, y) \in K[x, y]$ 是不可约多项式.

   (a) 证明: $f(x, y)$ 是 $K(y)[x]$ 中的单位或者不可约元.

   (b) 已知 $g(x, y) \in K[x, y]$, $f(x, y)$ 不整除 $g(x, y)$. 证明: $f = 0 = g$ 在 K 上只有有限组解.

4 复变函数

1. 设 f 是整函数, $f \in L^1(\mathbb{C})$, 证明: $f \equiv 0$.

2. 设 f 是单位圆盘上的全纯函数, 且满足 $|f(z)| \to 1(|z| \to 1)$. 证明: 存在有限个复数 a_i 以及复数 t, 使得 $f(z) = e^{it} \cdot \prod_{i=1}^{n} (\frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z})^{n_i}$.

3. 设 f 是有界闭区域 D 上的全纯自映射, 且存在不动点 $z_0 \in D$, 证明: $|f'(z_0)| \leq 1$.

5 实变函数

1. 设 $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ 是有界函数, 证明: $\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty nt^{-n-1} f(t)dt = f(1)$.

2. 设 $f(g)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的 Borel(Lebesgue) 可测函数, 判断 $g \circ f$ 的可测性, 证明或给出反例.

3. 已知 $\{f_k\}$ 在 L^p 意义下收敛于 f, 证明: 存在子列 $\{f_{k_i}\}$ 几乎处处收敛于 f.

6 微分几何

1. 写出以下问题的答案
   (a) 球面大圆的曲率和挠率
   (b) 球面的高斯曲率
   (c) 球面大圆的测地曲率

2. 已知曲面 S 的方程为 $S(u,v) = (u, v, f(u,v)$
   (a) 计算曲面 S 的第一, 第二基本形式.
   (b) 若 $f(u,v) = \ln\cos u - \ln\sin v$, 计算曲面 S 的平均曲率.

3. 已知 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中紧致无边界可定向曲面
   (a) 若 S 上处处存在光滑的切向量场, 给出 S 上整体的正交活动标架.
   (b) 球面是否存在处处非零的光滑切向量场, 请说明理由.