第 10 章 2024 秋代数学 (研) 期中

✍ **练习 10.1** 第一题暂缺.

✍ **练习 10.2(20 分)** 考虑 $H = \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. 考虑子模 $A = \{0\} \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$, 以及 A 的子模 $B = \{0\} \oplus (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

1. 请叙述:A 在 H 中的补模的概念 (或等价条件).
2. 设 $X \subseteq H$ 是 A 的补. 证明有同构 $H/X \simeq \mathbb{Z}$.
3. 对于 A, 请列出其在 H 中的所有补, 并给出论证.
4. 判断并论证:B 在 H 中是否有补?

✍ **练习 10.3(30 分)** 设 R 为环. 考虑模同态 $f: X \to L$ 和 $g: Y \to L$. 设 $E = \{(x, y) \in X \oplus Y : f(x) = g(y)\}$.

1. 证明如下的交换图表是拉回图. 这里,p_1 和 p_2 表示相应的投影同态.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "\theta"] \\
X \arrow[r, "f"] & L
\end{tikzcd}$$

2. 证明:$\mathrm{Ker}(p_2)$ 同构于 $\mathrm{Ker}(f)$.
3. 证明:g 诱导单同态 $\mathrm{coker}(p_2) \hookrightarrow \mathrm{coker}(f)$.
4. 试举例: 上述诱导单同态不一定是同构.
5. 具体例子:$R = \mathbb{Z}$, $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 使得 $f(n) = \overline{n}$, $g: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 使得 $g(\overline{n}) = \overline{2n}$. 如上定义 E, 试计算 E 的秩和扭模.

✍ **练习 10.4(20 分)** 考虑域上二元多项式环 $R = k[x, y]$, 其由 x, y 生成的理想 $\mathfrak{m} = (x, y)$, 则 $\mathfrak{m}^n$ 均为 R 的线性子空间.

1. 计算线性空间 $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 的维数.
2. 设 F 为秩 m 的自由 $R-$ 模. 试求线性空间 $\mathfrak{m}^n F/(\mathfrak{m}^{n+1}F)$ 的维数.
3. 作为 $R-$ 模,$\mathfrak{m}$ 不是自由模.
4. 作为 $R-$ 模,$\mathfrak{m}$ 不是内射模.

✍ **练习 10.5(5 分)** 设 $f(x) \in k[x]$ 为非零多项式. 考虑商环 $R = k[x]/(f(x))$. 试证明:R 作为其自身的模是内设模.

✍ **练习 10.6(5 分)** 考虑 4 阶循环群 $G = \langle g : g^4 = 1 \rangle$, $H = \langle h : h^4 = 1 \rangle$ 和 2 阶循环群 $A = \langle a : a^2 = 1 \rangle$. 群同态 $f: A \to G$ 和 $g: A \to H$ 满足 $f(a) = g^2$ 和 $g(a) = h^2$. 考虑群范畴 $\mathcal{GROUP}$ 中的推出图:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & G \arrow[d] \\
H \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

试证明: 群 E 是无限群.