第 11 章 2024 秋代数学 (研) 期末试题

✍ **练习 11.1(20 分)**

1. 验证:$\mathrm{ann}(R)$ 是 M 的双边理想.
2. 设 $_RM$ 是 Noether 模且环 R 交换, 证明: 商环 $R/\mathrm{ann}(M)$ 是 Noether 环.
3. 设 $_RM$ 是 Artin 模且环 R 交换, 讨论: 商环 $R/\mathrm{ann}(M)$ 是否总为 Artin 环?(提示:$\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$.)
4. 断言 (2) 对于非交换环是否总成立?

✍ **练习 11.2(40 分)** 考虑 $\mathbb{C}$ 上的有限生成代数 $R=\mathbb{C}[x_1,x_2,\cdots,x_n]/I$, 以及形式幂级数代数 $\mathbb{C}[[y]]=\{\sum_{i=0}^{\infty}a_iy^i|a_i\in\mathbb{C}\}$, 及其分式域 $\mathbb{C}((y))$. 回顾 $\mathrm{rad}(R)=\bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathrm{Max}(R)}\mathfrak{m}$ 为 Jacobson 根.

1. 对于任意多项式 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 证明:$f+I\in\mathrm{rad}(R)$ 当且仅当 $f\in\sqrt{I}$.
2. 计算并论证:$\mathbb{C}[[y]]$ 的 Jacobson 根和 nil 根.
3. 证明:$\mathbb{C}[[y]]$ 不同构于任何有限生成复代数.
4. 描述 $\mathbb{C}[[y]]$ 的所有有限生成不可分解模, 并计算这些模的自同态代数.
5. 考虑自然的 $\mathbb{C}[[y]]-$ 模 $L=\mathbb{C}((y))/\mathbb{C}[[y]]$. 计算并论证:$L$ 是否为 Noether 模? 是否为 Artin 模? 是否为不可分解模?

✍ **练习 11.3(20 分)** 设 A 为有限维复代数. 考虑有限维左 $A-$ 模 V 及其相应地代数同态 $\rho\colon A\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$.

1. 试证明: 模 V 是单的, 当且仅当 ρ 是满射.
2. 设 A 复半单代数. 考虑另外的左 $A-$ 模 (V',ρ'). 证明: 模 V 和 V' 同构, 当且仅当 $\mathrm{Ker}(\rho)=\mathrm{Ker}(\rho')$.
3. 设基域改为实数域. 类似 (1) 中, 考虑单的左 $A-$ 模 V 以及相应的实代数同态 $\rho\colon A\to\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. 是否仍有 ρ 总是满射?

✍ **练习 11.4(15 分)** 考虑集合 $X=\{有序对(i,j)|i,j=1,2,3\}$, 对称群 S_3 自然作用到 X 上,$g(i,j)=(g(i),g(j))$. 试将 S_3 的置换表示 $\mathbb{C}X$ 分解为不可约表示的直和. 提示: 同构意义下, 描述其不可分解直和项及其相应的重数即可.

✍ **练习 11.5(5 分)** 设 $m,n\geqslant 1$. 设有 (保持单位元的) 复代数同态 $M_n(\mathbb{C})\to M_m(\mathbb{C})$. 试证明:$n$ 整除 m.