2024 年近世代数 (H) 期中试题 (回忆版)

日期：2024 年 5 月 12 日　整理人: 陈卓

问题 1. 记 $E=\mathbb{Q}(\mathrm{i},\xi)$, 其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1},\xi=e^{\frac{2\pi}{5}},\cos(\frac{2\pi}{5})=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. 证明:E 为 $\mathbb{Q}$ 关于 $x^9-x^5-x^4+1$ 的分裂域.
2. 计算:ξ 在 $\mathbb{Q}(i)$ 上的最小多项式.
3. 计算:x^4+6x^2+5 在 $\mathbb{Q}(\xi)$ 中的不可约分解.
4. 计算:$\dim_{\mathbb{Q}} E, \dim_{\mathbb{Q}}(E\cap\mathbb{R})$.
5. 计算:$\mathrm{Aut}(E)$, 并判断其是否为 Abel 群.

问题 2. 记 $K=\mathbb{F}_3[y]/(y^2+\bar{1}),u=\bar{y};L=\mathbb{F}_3[z]/(z^2+z-1),v=\bar{z}$.
计算:K 到 L 的全部环同态.

问题 3. $\mathfrak{m}$ 是主理想整环 R 的极大理想.$R/\mathfrak{m}\simeq\mathbb{F}_p$.
计算:$|R/\mathfrak{m}^2|$ 和 $|\mathrm{Aut}(R/\mathfrak{m}^2)|$.

问题 4. 记 Gauss 整环 $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]=R$,p 为正素数, 子环 $S_p=\{m+pni|m,n\in\mathbb{Z}\}$.

1. 计算:$17-7i$ 在 R 中的不可约分解.
2. 计算:$|R/(17-7i)|$ 和 $|\mathrm{Aut}(R/(17-7i))|$.
3. 证明或否定:$S_5/(5)\simeq S_5/(5i)$; 若 $p\neq q$, 则 $S_p\simeq S_q$.

2024 年近世代数 (H) 期末试题 (回忆版)

日期：2024 年 6 月 22 日　整理人: 刘飞鹏

问题 5. 设 $\mathbb{Q}$ 是有理数域,$E=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{18},i), F=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}), K=E\cap F$.

1. 计算:$\dim_{\mathbb{Q}}(E)$.
2. 判断:x^4-18 是否是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式?
3. 计算:$\dim_{\mathbb{Q}}(K)$.
4. 记 $\Sigma=\{a=\sqrt[4]{18}, b=\sqrt[4]{18}i, c=-\sqrt[4]{18}, d=-\sqrt[4]{18}i.\}$, 则 $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ 中的元素作用在 Σ 上对应一个置换, 从而诱导群同构:
$$\rho : \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) \to S(\Sigma).$$
计算:$\mathrm{Im}(\rho)$.
5. 计算: 域扩张 $E/\mathbb{Q}$ 的所有中间域.

问题 6. 记 x 是文字,$L=\mathbb{C}(x)$ 为复系数的有理函数域. 记 $L_n=\mathbb{C}(x^n+x^{-n})$.

1. 计算:$\dim_{L_n} L$.
2. 证明或否定:$L_m\subseteq L_n \Leftrightarrow n|m$.
3. 计算: 域扩张 L/L_4 的所有中间域.

问题 7. 设 G 是有限群,H 是其真子群. 证明:
$$G\neq \cup_{g\in G} gHg^{-1}.$$
这对无限群成立吗?

问题 8. A 是一有限生成 Abel 群,$\mathrm{rank}(A)=2$.
$$\rho : A\to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$
是满群同态. 证明:$\ker\rho$ 是 A 的扭子群.