中国科学技术大学数学科学学院
2024–2025 学年第 1 学期期中考试试卷

课程名称： 代数学基础　　　**课程编号：** 001356

考试时间： 2024 年 11 月 17 号 9:00-11:00　　　**考试形式：** 闭卷

姓名： ________ 　**学号：** ________ 　**学院：** ________

题号	第一题 (25 分)	第二题 (25 分)	第三题 (50 分) 3.1(15 分)	3.2(10 分)	3.3(10 分)	3.4(15 分)	总分 (100 分)
得分							

本试卷共 6 页、14 题，全卷总分 100 分，考试时间 120 分钟。在本试卷中子环均要求含有原环的单位元。**注意事项：直接在试卷上答题，切勿写在草稿纸上。**

一、填空题：本题 5 小题，共 25 分。

1.1. (5 分) 设 K 为域. 则多项式环 $K[x,y]$ 的全体单位构成的集合为 ________________.

1.2. (5 分) 方程 $71x+97y=11$ 的全体整数解为 ________________.

1.3. (5 分) 2114^{4321}(十进制表示中) 的末两位数码为 ________________.

1.4. (5 分) 设小于 100 的正整数 m 满足 $9m\equiv 75 \mod 111$ 和 $3^m\not\equiv 3 \mod 10$, 则 m=________.

1.5. (5 分) 记 m 为整数 $2^{10}\times 3^2\times 5^2\times 17^{12}$ 全体正因子的立方和. 则 $2^m\equiv$________ mod 17.

二、判断题：本题 5 小题，共 25 分。判断下面说法是否正确。若正确，请简要证明；若错误，请 (举例) 指出错误, 并简要说明理由。

2.1. (5 分) 实数加法群 $(\mathbb{R},+)$ 和乘法群 $(\mathbb{R}_+,\cdot)$ 同构; 有理数加法群 $(\mathbb{Q},+)$ 和乘法群 $(\mathbb{Q}_+,\cdot)$ 也同构. (注: $\mathbb{R}_+:=\{r\in\mathbb{R}\mid r>0\}$, $\mathbb{Q}_+:=\{r\in\mathbb{Q}\mid r>0\}$.)

2.2. (5 分) 设 $\varphi\colon G \to H$ 为群同态. 若 G 有限且 φ 为满同态, 则 $|G| = |\ker(\varphi)| \cdot |H|$.

2.3. (5 分) 对于任意复数 $\alpha \in \mathbb{C}$, 考虑赋值映射 $\varphi_\alpha\colon \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C}, f(x) \mapsto f(\alpha)$. 将 φ_α 的像集记为 $\mathbb{Q}[\alpha]$. 则 $\mathbb{Q}[\pi]$ 是 $\mathbb{C}$ 的子环, 但不是子域. (注: 圆周率 π 有如下事实: π 是一个超越数, 即对于任意非零有理多项式 $f(x)$, 都有 $f(\pi) \neq 0$.)

2.4. (5 分) 设 R 为环 (不一定交换). 则 R 关于乘法有左消去律当且仅当它关于乘法有右消去律.

2.5. (5 分) 群 $\mathbb{Q}$ 仅有平凡自同构. 即, 若 $\varphi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 为群同构, 则 φ 为 $\mathbb{Q}$ 上恒等映射.

三、解答及证明题：本题 4 小题, 共 50 分。本题需给出详细步骤，按步骤给分。

3.1. (15 分) 利用课上**中国剩余定理证明方法**, 求解同余方程组:

$$\begin{cases} 49x \equiv 42 \mod 77 \\ x \equiv 5 \mod 13 \\ x \equiv 8 \mod 19 \end{cases}$$

3.2. (a).(5 分) 证明对任意不全为零的整数 $m_1, m_2 \cdots, m_n$ 和整数 d,

$$d \mid \gcd(m_1, \cdots, m_n) \Longleftrightarrow d \mid m_i \ (\forall i = 1, 2, \cdots, n).$$

(b).(5 分) 证明对任意全不为零的整数 $m_1, m_2 \cdots, m_n$ 和整数 m,

$$\operatorname{lcm}(m_1, \cdots, m_n) \mid m \Longleftrightarrow m_i \mid m \ (\forall i = 1, 2, \cdots, n).$$

(注: 此题不允许使用最大公因子和最小公倍数理想语言的解释, 也不允许使用关于 $\gcd(m_1, \cdots, m_n)$ 的贝祖等式, 除非你给出相应结论的证明.)

3.3. (10 分) 设 $G_0, G_1, G_2, \cdots$ 为一列群. 对于任意 $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \colon G_{n+1} \to G_n$ 为群同态. 考虑集合

$$\{(g_0, g_1, g_2, \cdots) \mid \text{对于任意 } n \in \mathbb{N}, \text{均有} g_n \in G_n, \varphi_n(g_{n+1}) = g_n.\}$$

将此集合记为 $\varprojlim_n G_n$. 证明:

(a).(6 分) 在 $\varprojlim_n G_n$ 上可定义如下二元运算:

$$(g_0, g_1, g_2, \cdots) \cdot (g_0', g_1', g_2', \cdots) := (g_0 g_0', g_1 g_1', g_2 g_2', \cdots).$$

并且 $(\varprojlim_n G_n, \cdot)$ 构成群;

(b).(2 分) 对于任意 $m \in \mathbb{N}$, 映射 $\psi_m \colon \varprojlim_n G_n \to G_m, (g_0, g_1, g_2, \cdots) \mapsto g_m$ 均为群同态;

(c).(2 分) 若对任意 $n \in \mathbb{N}$, φ_n 均为满同态, 则对任意 $m \in \mathbb{N}$, ψ_m 也为满同态.

3.4. (15 分) 设 $(M,+)$ 和 $(N,+)$ 为交换群. 记 Hom(M,N) 为全体从 M 到 N 的群同态组成的集合. 即,

$$\mathrm{Hom}(M,N) := \{\varphi\colon M \to N \mid \varphi \text{ 为群同态}\}.$$

在 Hom(M,N) 上定义加法如下

$$(\varphi+\psi)(m) := \varphi(m) + \psi(m).$$

(a) (6 分) 验证: $(\mathrm{Hom}(M,N),+)$ 构成交换群;

(b) (6 分) 验证: $(\mathrm{Hom}(M,M),+,\circ)$ 构成环; (注: 此处 $\circ$ 为映射的合成.)

(c) (3 分) 举例说明: 环 $(\mathrm{Hom}(M,M),+,\circ)$ 不一定交换.