Foundation of Algebra – Final Test

Keyboarded by Jacey Wei

14 January 2025

1 (15分)

设 $f(x) = x^2 + \overline{2} \in \mathbb{F}_3[x]$ 以及 $g(x) = x^3 + \overline{2}x^2 + x + \overline{2} \in \mathbb{F}_3[x]$
(1) 求出 f 和 g 的最大公约式.
(2) 求出所有的多项式 $u, v \in \mathbb{F}_3[x]$ 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = x^2 + x + 1$$

2 (20分)

本题分为四个小题，判断1分，简述过程4分.
(1) 设 $\mathbb{F}$ 是域, G 是 $\mathbb{F}^*$ 的有限子群，则 G 循环群.
(2) $(\mathbb{Z}/710\mathbb{Z})^*$ 没有16阶子群.
(3) $(\mathbb{Z}/710\mathbb{Z})^*$ 和 $(\mathbb{Z}/319\mathbb{Z})^*$ 都为非循环群，且它们不同构.
(4) 设 $f \in \mathbb{Q}[x]$, 则 $gcd(f, f^{'}) \neq 1$ 当且仅当存在不可约多项式 $q \in \mathbb{Q}[x]$, $q^2 | f$.

3 (15分)

设$\sigma_1 = (136)(249758) \in S_9$, $\sigma_2 = (145)(289736) \in S_9$.
(1) 求$\sigma = \sigma_1\sigma_2$的不相交轮换表示.
(2) 求σ的逆序数，奇偶性和阶.
(3) 求一个置换$\tau \in S_9$使得$\tau^{-1}\sigma_1\tau = \sigma_2$.

4 (10分)

(1) 求模41的最小正原根。

(2) 求模486的正原根中最小的4个。

5 (10分)

设$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$

(1) 证明$f(x)$在$\mathbb{Q}[x]$中不可约.

(2) 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$为$f(x)$的四个复数根，求$\sum\limits_{i=1}^{4} \alpha_i^3$.

6 (10分)

设$f(x) = x^7 + 12x^5 + 18x^4 + 6x^3 + 24x^2 + 12$, $g(x) = x^4 - 6x^2 - 3x + 2$.

(1)证明多项式f在$\mathbb{Z}[x]$中不可约.

(2)求多项式g的全部复数根，并求其在在$\mathbb{Z}[x]$中的不可约分解.

7 (15分)

(1) 计算勒让德符号$(\frac{-598}{257})$.

(2) 证明：对整数a, a是模257的原根当且仅当它是模257的非二次剩余.

(3) 求出所有的素数p, 使得$x^2 + 2x + 11 \in \mathbb{F}_p[x]$中可约.

8 (10分)

设R为含幺交换环，R的真理想$M \neq R$称为R的极大理想，若 $\forall N \lhd R$, $M \subset N \subset R$, 则$N = M$或$N = R$. 证明：

(1) 设p为素数，则$\mathbb{Z}$的主理想$p\mathbb{Z}$为其极大理想.(2分)

(2) 零理想(0)是域$\mathbb{F}$的极大理想；理想(x)是域$\mathbb{F}$上一元多项式环$\mathbb{F}[x]$的极大理想.(2分)

(3) $M \lhd R$是R的极大理想当且仅当R/M是域.(2分)

(注：你可以直接使用结论若$M \lhd R$，则R/M是含幺交换环)

(4) $\mathbb{Z}[x]$中由$x^2 + 1$和奇素数p生成的理想$(x^2 + 1, p)$是极大理想吗？为什么？(4分)