中国科学技术大学期末考试

授课教师：沈舜麟

考试科目：高等实分析　　　　考试日期：2025年1月4日　09：00-11：00

姓　名：________　　　　学　号：________

(本试题共 8 道大题，满分 100 分)

1. (15分) 设f_n，$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,且$f_n \to f$ a.e. 证明

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n - f| dx \to 0, \quad \text{当且仅当} \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f_n| dx \to \int_{\mathbb{R}^d} |f| dx.$$

2. (15分) 设Ω为$\mathbb{R}^d$中开集，$K \subset \Omega$为紧集.证明存在$\psi \in C_c^\infty(\Omega)$满足

$$\psi(x) = 1, \quad \forall x \in K.$$

3. (15分) 证明P.V. $\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, 并计算$\widehat{\text{P.V.} \frac{1}{x}}$.

4. (15分) 设$d \geq 3$, $F(x) = |x|^{2-d} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$,证明在$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$中成立

$$\Delta F = c\delta_0,$$

其中Δ是广义Laplace算子，c是一个常数，δ_0是Dirac分布函数。

5. (10分) 设$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$,判断：

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0?$$

若是，给出证明。若否，给出反例。

6. (10分)设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$，令

$$D(f) =: \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{f(x)\overline{f(y)}}{|x-y|^2} dx dy.$$

判断:是否对任意$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$,成立$D(f) \geq 0$?若是，给出证明。若否，给出反例。

7. (10分) 设$1 < p \leq 2$.证明对任意$f \in L^p(\mathbb{R})$,成立

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^p |\xi|^{p-2} d\xi \leq C(p) \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx.$$

8. (10分) 设$T: L^p(\mathbb{R}^d) \mapsto L^q(\mathbb{R}^d)$有界线性算子，且平移不变，即

$$\|Tf\|_{L^q} \leq \|T\|_{L^p \mapsto L^q} \|f\|_{L^p}, \quad T(\tau_h f) = \tau_h(Tf),$$

其中$\tau_h f(x) = f(x+h)$. 证明:当$1 \leq q < p < \infty$时，则$T = 0$.