中国科学技术大学 2024 年新生入学考试

数学试卷

院系____________ 姓名____________ 学号_________________ 总分____________

说明：试卷满分 100 分，考试时间 120 分钟．禁止使用手机、计算器等电子设备．

一、填空题（每空 5 分，共 40 分．结果须化简，写在答题纸上．）

1. 用 $\mathrm{card}(X)$ 表示有限集 X 中元素的个数．若 $\mathrm{card}(A\cup B)=30$，$\mathrm{card}(A\cup C)=40$，$\mathrm{card}(B\cup C)=50$，则 $\mathrm{card}(A\cup B\cup C)$ 的取值范围是__①__．

2. 平面区域 $\{(x,y)\mid xy\geqslant 0$ 并且 $|x-1|+|y-1|\leqslant 2\}$ 的面积是__②__．

3. 设函数 $f(x)=ax^2+x+1-\mathrm{e}^x$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一零点，则实数 a 的取值范围是__③__．

4. 设复数 z,w 满足 $z+w=1$ 且 $zw=\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位，则 $z^5+w^5=$__④__．

5. 设正四棱锥铁块的每个侧面都是边长 1 的正三角形，将此铁块磨制成半径 r 的球，则 r 的最大值是__⑤__．

6. 已知数列 $\{n^{10}\}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ 的前 n 项和公式为 $S_n=c_0+c_1n+c_2n^2+\cdots+c_{11}n^{11}$，则 $c_{10}=$__⑥__．

7. 设 $(x+24)^{2024}$ 的展开式的 x^m 项系数最大，则 $m=$__⑦__．

8. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y=\max\{0,X\}$．已知 $|X|$ 的均值 $E(|X|)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$，则 Y 的方差 $D(Y)=$__⑧__．

二、解答题（每题 20 分，共 60 分．须写出必要的计算和证明过程．）

9. 设 L_1,L_2 是双曲线 $H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ 的渐近线，O 是原点，A 是 H 上动点，点 B 在 L_1 上使得 $AB\,/\!/\,L_2$．求证：$\triangle OAB$ 的面积是定值．

10. 设圆 $x^2+y^2=1$ 的内接正 n 边形的面积为 A_n，记 $Q_n=\dfrac{A_{4n}-A_{2n}}{A_{2n}-A_n}$，$n\geqslant 3$．求证：$\dfrac{1}{4}<Q_n<\dfrac{1}{3}$ 并且 $\pi<\dfrac{A_{2n}-Q_nA_n}{1-Q_n}$．

11. 设 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 都是正数，并且
$$\frac{a_1^{2025}}{b_1^{2024}}+\frac{a_2^{2025}}{b_2^{2024}}+\frac{a_3^{2025}}{b_3^{2024}}=a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=1.$$
求证：$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_3=b_3$．

参考答案和评分标准

一、

① $[50,70]$ ② 6 ③ $(\frac{1}{2}, \mathrm{e}-2)$ ④ $-4-5\mathrm{i}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ⑥ $\frac{1}{2}$ ⑦ 81 ⑧ $\frac{\pi-1}{2\pi}$

更正：①{50,51,...,60} ⑤(√6-√2)/4 ⑦80或81

9. **解法一**：不妨设 $L_1: y=\frac{b}{a}x$，$L_2: y=-\frac{b}{a}x$，$A(x,y)$，$B(at,bt)$. (5 分)

由 $AB \parallel L_2$，得 $bt-y=-\frac{b}{a}(at-x)$，故 $2t=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$. (5 分)

$\triangle OAB$ 的面积 $=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\frac{t}{2}(bx-ay)=\frac{ab}{4}$. (10 分)

解法二：作坐标变换，化双曲线方程为 $xy=1$，结论显然成立.

10. $A_n=\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$，$A_{2n}-A_n=2n\sin\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{2n}$，$Q_n=2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^2\frac{\pi}{4n}}{\sin^2\frac{\pi}{2n}}$. (5 分)

注意到 $f(\theta)=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$ 在 $(0,\pi)$ 单调增并且 $f(\theta)>\frac{1}{2}$. (5 分)

由此可得 $Q_n>\frac{1}{4}$，$Q_{2n}<Q_n$，$Q_n\leqslant Q_3=\frac{4}{\sqrt{3}}-2<\frac{1}{3}$. (5 分)

故
$$\begin{aligned}\pi &= A_n+(A_{2n}-A_n)+(A_{4n}-A_{2n})+(A_{8n}-A_{4n})+\cdots\\ &< A_n+(A_{2n}-A_n)(1+Q_n+Q_n^2+\cdots)=\frac{A_{2n}-Q_nA_n}{1-Q_n}.\end{aligned}$$ (5 分)

11. 首先证明引理：$\forall x,y\in(0,1)$，$\frac{x^{2025}}{y^{2024}}+\frac{(1-x)^{2025}}{(1-y)^{2024}}\geqslant 1$. (5 分)

设 $f(x)=\frac{x^{2025}}{y^{2024}}+\frac{(1-x)^{2025}}{(1-y)^{2024}}$，则 $f'(x)=2025\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{2024}-\left(\frac{1-x}{1-y}\right)^{2024}\right]$.

当 $0<x<y$ 时，$\frac{x}{y}<1$，$\frac{1-x}{1-y}>1$，$f'(x)<0$.

当 $y<x<1$ 时，$\frac{x}{y}>1$，$\frac{1-x}{1-y}<1$，$f'(x)>0$. 故 $f(x)$ 的最小值 $f(y)=1$. (5 分)

由引理可得 $\frac{a_1^{2025}}{b_1^{2024}}+\frac{a_2^{2025}}{b_2^{2024}}+\frac{a_3^{2025}}{b_3^{2024}}\geqslant\frac{(a_1+a_2)^{2025}}{(b_1+b_2)^{2024}}+\frac{a_3^{2025}}{b_3^{2024}}\geqslant\frac{(a_1+a_2+a_3)^{2025}}{(b_1+b_2+b_3)^{2024}}$. (5 分)

上式等号成立 $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\Leftrightarrow a_i=b_i$，$\forall i$. (5 分)