参考答案

(期末考试, 2024 年 6 月 28 日)

一. (20 分) 单项选择填空题 (每题 2 分)

1. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自均匀分布 $U(-\theta,\theta)$ 的一组样本, θ 为未知参数, 则下述量为统计量的是

(A) $\overline{X}-\theta$　　(B) $\max\limits_{1\le i\le n}(X_i-\theta)-\min\limits_{1\le i\le n}(X_i-\theta)$

(C) $\max\limits_{1\le i\le n}(X_i-\theta)$　　(D) $\min\limits_{1\le i\le n}(X_i-\theta)$

2. 设 $\hat{\theta}_n$ 为未知参数 θ 的一个估计量, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}|\hat{\theta}_n-\theta|=0$, 则 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的

(A) 无偏估计　(B) 有效估计　(C) 相合估计　(D) 渐近正态估计

3. 假设样本 X 的密度为 $f_\theta(x)$, 其中 θ 为参数, 则下列表述不正确的是

(A) 固定 x 时 $f_\theta(x)$ 为似然函数　　(B) 固定 θ 时 $f_\theta(x)$ 为似然函数

(C) 固定 θ 时 $f_\theta(x)$ 为密度函数　　(D) $f_\theta(x)$ 衡量了不同 θ 下观测到值 x 的可能性大小

4. 一个参数 θ 的 95% 区间估计为 $[0.1, 0.3]$, 则下列表述正确的是

(A) 若该区间为置信区间, 则表明 θ 位于该区间的概率是 0.95

(B) 该区间的边际误为 0.2

(C) 对假设 $H_0:\theta=0.2\leftrightarrow H_1:\theta\neq 0.2$, 会在 0.05 水平下拒绝原假设

(D) 若该区间为贝叶斯可信区间, 则表明 θ 位于该区间的概率是 0.95

5. 下列表述错误的是

(A) 矩估计量一般不唯一　　(B) 无偏估计总是优于有偏估计

(C) 相合性是一个估计量的基本性质　　(D) 最大似然估计可以不存在

6. 若 $\delta(X)$ 是一个损失下的 Bayes 法则, 则下列表述正确的是

(A) $\delta(X)$ 的贝叶斯风险不超过 Minimax 风险

(B) $\delta(X)$ 不可能是一个 Minimax 法则

(C) $\delta(X)$ 是可容许的

(D) $\delta(X)$ 的风险为常数

7. 下述对一个显著性检验方法的描述错误的是

(A) 原假设与对立假设地位不均等, 原假设被保护起来

(B) p 值越显著表明原假设成立的依据越强烈

(C) 在一个检验结果是不能拒绝零假设时, 检验只可能会犯第二类错误

(D) 双边假设的接受域等价于参数的置信区间

8. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,1)$ 的简单样本, 考虑假设检验问题 $H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu=0.5$. 如果要求检验的第一类和第二类错误均不超过 α $(0<\alpha<1)$, 则样本量 n 应满足__$n\ge\lceil 16u_\alpha^2\rceil$__ (结果用分位数表示).

解析: 两点假设的拒绝域形如 $R=\{\boldsymbol{X}:\overline{X}>c\}$. 按要求

$$\alpha\ge\mathsf{P}(\boldsymbol{X}\in R\mid H_0)=\mathsf{P}_{\mu=0}(\overline{X}>c)=1-\Phi(\sqrt{n}c),$$
$$\alpha\ge\mathsf{P}(\boldsymbol{X}\notin R\mid H_1)=\mathsf{P}_{\mu=0.5}(\overline{X}\le c)=\Phi(\sqrt{n}(c-0.5)).$$

于是我们有

$$\begin{cases} \sqrt{n}c \geq u_\alpha, \\ \sqrt{n}(c-0.5) \leq -u_\alpha, \end{cases} \implies 0.5\sqrt{n} \geq 2u_\alpha, \implies n \geq \lceil 16u_\alpha^2 \rceil.$$

9. 设某种产品的质量等级可以划分为“优”、“合格”和“不合格”, 为了判断生产此产品的三家工厂的产品是否有差异, 使用拟合优度检验方法时的原假设为 三家工厂生产的产品质量无差异 , 渐近卡方分布的自由度为 4 .

10. 设 $X_1,\dots,X_n$ 为来自均匀分布 $U(0,\theta)$, $\theta > 0$ 的一组简单样本, θ 的先验密度为 $\pi(\theta) = 1/(2\theta^2)$, $\theta \geq 1/2$. 考虑假设检验问题 $H_0: \theta \leq 1 \leftrightarrow H_1: \theta > 1$, 则其 Bayes 因子 BF_{01} 为 $\left[(x_{(n)} \vee 0.5)^{-n-1} - 1\right] \vee 0$.

解析: 样本联合密度与先验分别为

$$f(\boldsymbol{x} \mid \theta) = \theta^{-n} \cdot I(0 < x_{(n)} < \theta), \quad \pi(\theta) = 0.5\theta^{-2} \cdot I(\theta \geq 0.5).$$

因此 θ 的后验密度为

$$\pi(\theta \mid \boldsymbol{x}) \propto \theta^{-n-2} \cdot I(\theta > x_{(n)} \vee 0.5).$$

归一化后可得后验密度, 进而求得后验分布函数为

$$\Pi(\theta \mid \boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{\theta_*}{\theta}\right)^{n+1}, & \theta \geq \theta_*, \\ 0, & \theta < \theta_*, \end{cases}$$

其中 $\theta_* = x_{(n)} \vee 0.5$. 于是当 $\theta_* < 1$, 即 $x_{(n)} < 1$ 时,

$$\alpha_0 = \mathsf{P}(\theta \leq 1 \mid \boldsymbol{x}) = \Pi(1 \mid \boldsymbol{x}) = 1 - \theta_*^{n+1}, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_0 = \theta_*^{n+1}.$$

当 $\theta_* \geq 1$, 即 $x_{(n)} \geq 1$ 时, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$. 又因为 $\pi_0 = \mathsf{P}(\theta \leq 1) = 0.5$, $\pi_1 = \mathsf{P}(\theta > 1) = 0.5$, 所以贝叶斯因子为

$$\mathrm{BF}_{01} = \frac{\alpha_0/\alpha_1}{\pi_0/\pi_1} = \begin{cases} \theta_*^{-n-1} - 1, & \theta_* < 1, \\ 0, & \theta_* \geq 1 \end{cases} = \left[(x_{(n)} \vee 0.5)^{-n-1} - 1\right] \vee 0.$$

二. (20 分) 设从总体

X	0	1	2
P	p_1	p_2	p_3

(其中 $0 < p_1, p_2, p_3 < 1$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ 为未知参数) 中抽取的一个简单样本 $X_1,\dots,X_n$, 试
(1) 求 $p_1 - p_2$ 的最大似然估计, 并证明其为最小方差无偏估计.
(2) 求检验问题 $H_0: p_1 = p_2 \leftrightarrow H_1: p_1 \neq p_2$ 的一个 (渐近) 水平 α 检验.

最大似然估计: 似然函数

$$L(p_1, p_2; \boldsymbol{x}) = p_1^{n_0} p_2^{n_1} (1 - p_1 - p_2)^{n - n_0 - n_1},$$

其中 $n_i=\sum_{j=1}^n I(X_j=i),\ i=0,1$. 由对数似然方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l(p_1,p_2;\boldsymbol{x})}{\partial p_1}=\dfrac{n_0}{p_1}-\dfrac{n-n_0-n_1}{1-p_1-p_2}=0, \\ \dfrac{\partial l(p_1,p_2;\boldsymbol{x})}{\partial p_2}=\dfrac{n_1}{p_2}-\dfrac{n-n_0-n_1}{1-p_1-p_2}=0, \end{cases}$$

解得 p_1,p_2 的最大似然估计分别为

$$\hat{p}_1=\frac{n_0}{n},\quad \hat{p}_2=\frac{n_1}{n}.$$

进一步由最大似然估计的不变性可知 p_1-p_2 的最大似然估计为 $\hat{p}_1-\hat{p}_2=(n_0-n_1)/n$.

最小方差无偏估计: 将样本联合密度函数写成指数族形式如下

$$f(\boldsymbol{x};p_1,p_2)=\exp\left\{n_0\log\frac{p_1}{1-p_1-p_2}+n_1\log\frac{p_2}{1-p_1-p_2}\right\}\cdot(1-p_1-p_2)^n.$$

令 $\eta_1=\log\frac{p_1}{1-p_1-p_2}$, $\eta_2=\log\frac{p_2}{1-p_1-p_2}$, 于是自然参数空间 $\Theta^*=\{(\eta_1,\eta_2):-\infty<\eta_1<\infty,-\infty<\eta_2<\infty\}$ 有内点, 因此 (n_0,n_1) 是 (p_1,p_2) 的充分完全统计量. 又注意到 $\hat{p}_1$ 和 $\hat{p}_2$ 分别是 p_1 和 p_2 的无偏估计, 因此由 Lehmann-Scheffé 定理知 p_1-p_2 的最大似然估计是最小方差无偏估计.

检验问题的 (渐近) 水平 α 检验: (法一: 拟合优度检验) 取检验统计量为

$$K(\boldsymbol{X})=\sum_{r=1}^{3}\frac{(n_{r-1}-n\hat{p}_r)^2}{n\hat{p}_r}\xrightarrow{H_0}\chi^2_{3-1-1},$$

其中 $\hat{p}_r$ 为 H_0 下的极大似然估计. 注意到当 $p_1=p_2=p$ 时, 样本的似然函数为

$$L(p;\boldsymbol{x})=p^{n_0+n_1}(1-2p)^{n_2}.$$

由对数似然方程可得 $\hat{p}=(n_0+n_1)/(2n)$. 代入检验统计量表达式得

$$K(\boldsymbol{X})=\frac{(n_0-n_1)^2}{n_0+n_1}.$$

因此检验问题渐近水平 α 检验为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases} 1, & \text{当 } (n_0-n_1)^2>(n_0+n_1)\chi^2_1(\alpha), \\ 0, & \text{当 } (n_0-n_1)^2\le(n_0+n_1)\chi^2_1(\alpha). \end{cases}$$

(法二: 似然比检验) 注意到似然比

$$\lambda(\boldsymbol{X})=\frac{\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0}L(\theta)}=\frac{\hat{p}_1^{n_0}\hat{p}_2^{n_1}(1-\hat{p}_1-\hat{p}_2)^{n_2}}{\hat{p}^{(n_0+n_1)}(1-2\hat{p})^{n_2}}.$$

在大样本下, 我们有 $2\log\lambda(\boldsymbol{X})\xrightarrow{H_0}\chi^2_1$. 代入检验统计量表达式得

$$2\log\lambda(\boldsymbol{X})=2\log\frac{(n_0/n)^{n_0}\cdot(n_1/n)^{n_1}}{(n_0+n_1)^{n_0+n_1}/(2n)^{n_0+n_1}}=2n_0\log\frac{2n_0}{n_0+n_1}+2n_1\log\frac{2n_1}{n_0+n_1}.$$

因此检验问题渐近水平 α 检验为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \text{当 } 2n_0\log\dfrac{2n_0}{n_0+n_1}+2n_1\log\dfrac{2n_1}{n_0+n_1}>\chi_1^2(\alpha),\\ 0, & \text{当 } 2n_0\log\dfrac{2n_0}{n_0+n_1}+2n_1\log\dfrac{2n_1}{n_0+n_1}\le\chi_1^2(\alpha).\end{cases}$$

(法三: 利用渐近正态检验) 注意到

$$\hat{p}_1-\hat{p}_2=\frac{n_0-n_1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[I(X_j=0)-I(X_j=1)]$$

是独立随机变量之平均, 于是由中心极限定理知

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{p}_1-\hat{p}_2-\mathsf{E}[I(X_1=0)-I(X_1=1)])}{\sqrt{\mathsf{Var}[I(X_1=0)-I(X_1=1)]}}\xrightarrow{d}N(0,1),$$

其中 $\mathsf{E}[I(X_1=0)-I(X_1=1)]=p_1-p_2$, $\mathsf{Var}[I(X_1=0)-I(X_1=1)]=p_1+p_2-(p_1-p_2)^2$. 结合 Slutsky 定理, 因此考虑取检验统计量为

$$U(\boldsymbol{X})=\frac{\sqrt{n}(\hat{p}_1-\hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}_1+\hat{p}_2-(\hat{p}_1-\hat{p}_2)^2}}.$$

在 H_0 下, 我们有 $U(\boldsymbol{X})\xrightarrow{d}N(0,1)$. 于是检验问题渐近水平 α 检验为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \text{当 } |U(\boldsymbol{X})|>u_{\alpha/2},\\ 0, & \text{当 } |U(\boldsymbol{X})|\le u_{\alpha/2}.\end{cases}$$

(法四: 利用 Wald 检验) 记 $\boldsymbol{\theta}=(p_1,p_2)^{\mathsf{T}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{p}_1,\hat{p}_2)^{\mathsf{T}}$, 于是由中心极限定理有

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})\xrightarrow{d}N(0,\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{\theta})),$$

其中 Fisher 信息阵为

$$\boldsymbol{I}(\theta)=\begin{pmatrix}p_1^{-1}+p_3^{-1} & p_3^{-1}\\ p_3^{-1} & p_2^{-1}+p_3^{-1}\end{pmatrix}.$$

注意 $h(\boldsymbol{\theta})=p_1-p_2$, $\boldsymbol{B}=\partial h/\partial\boldsymbol{\theta}=(1,-1)$, 因此取检验统计量为

$$W_n=nh(\hat{\boldsymbol{\theta}})\left[\boldsymbol{B}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right]^{-1}h(\hat{\boldsymbol{\theta}})=\frac{n(\hat{p}_1-\hat{p}_2)^2}{\hat{p}_1+\hat{p}_2-(\hat{p}_1-\hat{p}_2)^2}.$$

在 H_0 下, 我们有 $W_n\xrightarrow{d}\chi_1^2$. 于是检验问题渐近水平 α 检验为

$$\phi(\boldsymbol{X})=\begin{cases}1, & \text{当 } W_n>\chi_1^2(\alpha),\\ 0, & \text{当 } W_n\le\chi_1^2(\alpha).\end{cases}$$

三. (30 分) 设 $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\sim N(\mu, 1)$, 其中 μ 为参数. 对水平 α, 试

(1) 求 $\mathsf{P}(X_1 > 0)$ 的最大似然估计, 并求其渐近方差.

(2) 证明检验问题 $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$ 不存在 UMPT, 其中 μ_0 为一已知数.

(3) 若参数 μ 在 $\mu = \mu_0$ 上的先验概率为 0.6, 在 $\mu \neq \mu_0$ 上的先验分布为 $N(\mu_0, 4)$, 损失函数取为 0-1 损失, 求 (2) 中的假设检验问题的 Bayes 决策.

最大似然估计及其渐近方差: 似然函数

$$L(\mu; \boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 - \frac{n(\mu - \overline{x})^2}{2}\right\}.$$

因此 μ 的最大似然估计为 $\hat{\mu} = \overline{X}$. 由最大似然估计的不变性可知, $p = \mathsf{P}(X_1 > 0) = \Phi(\mu)$ 的最大似然估计为 $\hat{p} = \Phi(\hat{\mu}) = \Phi(\overline{X})$. 注意到 $\overline{X} \sim N(\mu, 1/n)$, 由 Delta 方法可知 $\hat{p}$ 的渐近方差为

$$[\phi(\mu)]^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{\exp\{-\mu^2\}}{2n\pi}.$$

双边假设不存在 UMPT: 首先注意到正态分布族 (方差已知, 均值为未知参数) 关于 $T = \overline{X}$ 是单调似然比族. 因而对检验问题 $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1' : \mu > \mu_0$, 存在 UMPT 形如

$$\phi_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \overline{x} > \mu_0 + u_\alpha/\sqrt{n}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对检验问题 $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1'' : \mu < \mu_0$, 存在 UMPT 形如

$$\phi_2(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \overline{x} < \mu_0 - u_\alpha/\sqrt{n}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

显然 ϕ_1 和 ϕ_2 都是检验问题 $H_0 \leftrightarrow H_1$ 的水平 α 检验. 假设检验问题 $H_0 \leftrightarrow H_1$ 的 UMPT 存在, 令其为 ϕ_0. 对固定 $\mu_1 > \mu_0$ 和 $\mu_2 < \mu_0$, 检验 ϕ_0 也是简单假设 $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow K_1 : \mu = \mu_1$ 和 $H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow K_2 : \mu = \mu_2$ 的 UMPT. 因此由 Neyman-Pearson 引理可知 ϕ_0 有形式

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } f(\boldsymbol{x}; \mu_1) > k_1 f(\boldsymbol{x}; \mu_0), \\ 0, & \text{当 } f(\boldsymbol{x}; \mu_1) \leq k_1 f(\boldsymbol{x}; \mu_0), \end{cases}$$

$$\phi_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{当 } f(\boldsymbol{x}; \mu_2) > k_2 f(\boldsymbol{x}; \mu_0), \\ 0, & \text{当 } f(\boldsymbol{x}; \mu_2) \leq k_2 f(\boldsymbol{x}; \mu_0). \end{cases}$$

(法一) 考虑 $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} : \phi_0(\boldsymbol{x}) = 1\}$, 由单调似然比的性质可知

- 如果 $T(\boldsymbol{y}) > T(\boldsymbol{x})$, 则由第一个检验形式知 $\phi_0(\boldsymbol{y}) = 1$.
- 如果 $T(\boldsymbol{y}) < T(\boldsymbol{x})$, 则由第二个检验形式知 $\phi_0(\boldsymbol{y}) = 1$.

于是要么 $\phi_0(\boldsymbol{y}) = 1$ 对所有 $\boldsymbol{y}$ 成立, 要么 $\phi_0(\boldsymbol{x}) \neq 1$ 对所有 $\boldsymbol{x}$ 成立. 这时 ϕ_0 的功效比 ϕ_1 和 ϕ_2 在各自的检验问题 $H_0 \leftrightarrow K_1$ 和 $H_0 \leftrightarrow K_2$ 都要小, 导出矛盾. (法二) 由唯一性可知, 在 $\mu_1 > \mu_0$ 上, $\phi_0 = \phi_1$, a.e.; 在 $\mu_2 < \mu_0$ 上, $\phi_0 = \phi_2$, a.e. 由 ϕ_1 和 ϕ_2 的形式知这不可能成立.

假设检验问题中的 Bayes 决策: 由题意知两个假设的后验概率分别为

$$\alpha_0 = \mathsf{P}(\mu = \mu_0 \mid \boldsymbol{x}) = \frac{\pi_0 f(\boldsymbol{x} \mid \mu_0)}{m(\boldsymbol{x})}, \quad \alpha_1 = \mathsf{P}(\mu \neq \mu_0 \mid \boldsymbol{x}) = \frac{\pi_1 m_1(\boldsymbol{x})}{m(\boldsymbol{x})},$$

或者直接注意到简单假设对复杂假设的贝叶斯因子有形式

$$\mathrm{BF}_{01}(\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x} \mid \mu_0)}{m_1(\boldsymbol{x})}, \implies \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{\pi_0 f(\boldsymbol{x} \mid \mu_0)}{\pi_1 m_1(\boldsymbol{x})},$$

其中 $m(\boldsymbol{x}) = \pi_0 f(\boldsymbol{x} \mid \mu_0) + \pi_1 m_1(\boldsymbol{x})$, $m_1(\boldsymbol{x}) = \int_{\mu \neq \mu_0} f(\boldsymbol{x} \mid \mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu$. 下面计算 $m_1(\boldsymbol{x})$ 如下

$$\begin{aligned}
m_1(\boldsymbol{x}) &= \int_{\mu \neq \mu_0} f(\boldsymbol{x} \mid \mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{\mu \neq \mu_0} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 - \frac{n(\mu - \overline{x})^2}{2}\right\} \cdot (8\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{8}\right\} \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{2} \exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2}\right\} \int_{\mu \neq \mu_0} \exp\left\{-\frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{2}\right\} \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}}}{2} \exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2}\right\} \cdot (2\pi/A)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(C - \frac{B^2}{A}\right)\right\} \\
&= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{4n+1}} \exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2} - \frac{n(\overline{x} - \mu_0)^2}{2(4n+1)}\right\},
\end{aligned}$$

其中 $A = n + \frac{1}{4}$, $B = n\overline{x} + \frac{\mu_0}{4}$, $C = n\overline{x}^2 + \frac{\mu_0^2}{4}$. 因此

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \frac{0.6(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2} - \frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{2}\right\}}{0.4\frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{4n+1}} \exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2} - \frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{2(4n+1)}\right\}} = \frac{3\sqrt{4n+1}}{2} \exp\left\{-\frac{2n^2(\overline{x} - \mu_0)^2}{4n+1}\right\}.$$

在 0-1 损失下, 该检验问题的贝叶斯决策为

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} a_0, & \text{当 } (\overline{x} - \mu_0)^2 \leq \frac{4n+1}{2n^2} \log \frac{3\sqrt{4n+1}}{2}, \\ a_1, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 a_0 表示接受假设 H_0, a_1 表示接受假设 H_1.

四. (30 分) 设 $X_1,\ldots,X_m$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda_1)$ (期望是 $1/\lambda_1$ 的指数分布), $Y_1,\ldots,Y_n$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda_2)$, 且样本 $X_1,\ldots,X_m$ 和 $Y_1,\ldots,Y_n$ 独立, 其中 λ_1, λ_2 为正参数. 记 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 分别为两组样本的样本均值. 试

(1) 求 $\mathsf{E}[(X_1-Y_1)^2 \mid \overline{X},\overline{Y}]$.

(2) 求 λ_1/λ_2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(3) 求检验问题 $H_0:\lambda_1=c\lambda_2 \leftrightarrow H_1:\lambda_1\neq c\lambda_2$ 的水平 α 似然比检验.

条件期望: (法一) 由指数分布的性质知

$$\mathsf{E}[(X_1-Y_1)^2]=\mathsf{E}(X_1^2)-2\mathsf{E}(X_1Y_1)+\mathsf{E}(Y_1^2)=\frac{2}{\lambda_1^2}-\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{2}{\lambda_2^2}.$$

注意到 $(\overline{X},\overline{Y})$ 是 (λ_1,λ_2) 的充分完全统计量, 由 UMVUE 的唯一性可知

$$\mathsf{E}[(X_1-Y_1)^2 \mid \overline{X},\overline{Y}]=\left(\frac{2}{\lambda_1^2}-\frac{2}{\lambda_1\lambda_2}+\frac{2}{\lambda_2^2}\right)_{\text{UMVUE}}.$$

显然地, 我们有

$$\mathsf{E}(\overline{X}^2)=\mathsf{Var}(\overline{X})+[\mathsf{E}(\overline{X})]^2=\frac{m+1}{m\lambda_1^2},\quad \mathsf{E}(\overline{Y}^2)=\mathsf{Var}(\overline{Y})+[\mathsf{E}(\overline{Y})]^2=\frac{n+1}{n\lambda_2^2}.$$

因此

$$\mathsf{E}[(X_1-Y_1)^2 \mid \overline{X},\overline{Y}]=\frac{2m\overline{X}^2}{m+1}-2\overline{X}\,\overline{Y}+\frac{2n\overline{Y}^2}{n+1}.$$

(法二) 由条件期望的线性性及独立性可知

$$\mathsf{E}[(X_1-Y_1)^2 \mid \overline{X},\overline{Y}]=\mathsf{E}(X_1^2\mid\overline{X})-2\mathsf{E}(X_1Y_1\mid\overline{X},\overline{Y})+\mathsf{E}(Y_1^2\mid\overline{Y}).$$

注意到 $X_1/(m\overline{X})\sim \mathrm{Be}(1,m-1)$, $Y_1/(n\overline{Y})\sim \mathrm{Be}(1,n-1)$, 且 $(\overline{X},\overline{Y})$ 是 (λ_1,λ_2) 的充分完全统计量, 由 Basu 定理可知

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(X_1^2\mid\overline{X})=\overline{X}^2\cdot\mathsf{E}\left(\frac{X_1^2}{\overline{X}^2}\mid\overline{X}\right)=\overline{X}^2\cdot\mathsf{E}\left(\frac{X_1^2}{\overline{X}^2}\right),\quad \mathsf{E}(Y_1^2\mid\overline{Y})=\overline{Y}^2\cdot\mathsf{E}\left(\frac{Y_1^2}{\overline{Y}^2}\right),\\
&\mathsf{E}(X_1Y_1\mid\overline{X},\overline{Y})=\overline{X}\,\overline{Y}\mathsf{E}\left(\frac{X_1}{\overline{X}}\cdot\frac{Y_1}{\overline{Y}}\mid\overline{X},\overline{Y}\right)=\overline{X}\,\overline{Y}\mathsf{E}\left(\frac{X_1}{\overline{X}}\right)\cdot\mathsf{E}\left(\frac{Y_1}{\overline{Y}}\right).
\end{aligned}$$

由贝塔分布性质知

$$\mathsf{E}\left(\frac{X_1}{m\overline{X}}\right)=\frac{1}{m},\quad \mathsf{E}\left(\frac{X_1^2}{m^2\overline{X}^2}\right)=\frac{2}{m(m+1)},\quad \mathsf{E}\left(\frac{Y_1}{n\overline{Y}}\right)=\frac{1}{n},\quad \mathsf{E}\left(\frac{Y_1^2}{n^2\overline{Y}^2}\right)=\frac{2}{n(n+1)}.$$

于是代入可得

$$\mathsf{E}[(X_1-Y_1)^2 \mid \overline{X},\overline{Y}]=\frac{2m\overline{X}^2}{m+1}-2\overline{X}\,\overline{Y}+\frac{2n\overline{Y}^2}{n+1}.$$

置信区间: 注意 $2m\lambda_1\overline{X}\sim\chi^2_{2m}$, $2n\lambda_2\overline{Y}\sim\chi^2_{2n}$, 取枢轴变量为

$$\frac{\lambda_1\overline{X}}{\lambda_2\overline{Y}}\sim F_{2m,2n}.$$

由 $\mathsf{P}(F_{2m,2n}(1-\alpha/2) \le \frac{\lambda_1\overline{X}}{\lambda_2\overline{Y}} \le F_{2m,2n}(\alpha/2)) = 1-\alpha$, 反解得到 λ_1/λ_2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[F_{2m,2n}(1-\alpha/2)\cdot\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}, F_{2m,2n}(\alpha/2)\cdot\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}\right].$$

似然比检验: 似然函数

$$L(\lambda_1,\lambda_2;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lambda_1^m \exp\left\{-\lambda_1\sum_{i=1}^m x_i\right\}\cdot\lambda_2^n\exp\left\{-\lambda_2\sum_{j=1}^n y_j\right\}.$$

由似然比检验的思想, 取检验统计量为

$$\Lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\sup_{\lambda_1>0,\lambda_2>0} L(\lambda_1,\lambda_2;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\sup_{\lambda_1/\lambda_2=c} L(\lambda_1,\lambda_2;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}.$$

注意到全空间下 $\hat\lambda_1 = 1/\overline{X}$, $\hat\lambda_2 = 1/\overline{Y}$. 在原假设空间下, 记 $\lambda_1 = c\lambda$, $\lambda_2=\lambda$, 考虑 λ 的似然函数为

$$L(\lambda;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = c^m\lambda^{m+n}\exp\left\{-\lambda(cm\overline{x}+n\overline{y})\right\}.$$

此时最大似然估计 $\hat\lambda = (m+n)/(cm\overline{x}+n\overline{y})$. 于是似然比可化简为

$$\begin{aligned}\Lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{L(\hat\lambda_1,\hat\lambda_2;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{L(c\hat\lambda,\hat\lambda;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} &= \frac{(cm\overline{x}+n\overline{y})^{m+n}}{c^m(m+n)^{m+n}\overline{x}^m\cdot\overline{y}^n}\\ &= \frac{1}{(m+n)^{m+n}}\left(m+n\frac{\overline{y}}{c\overline{x}}\right)^m\left(n+m\frac{c\overline{x}}{\overline{y}}\right)^n\\ &\triangleq \frac{1}{(m+n)^{m+n}}\left(m+nF^{-1}\right)^m\left(n+mF\right)^n,\end{aligned}$$

其中 $F := F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = c\overline{x}/\overline{y}$. 注意到 Λ 关于 F 先递减后递增, 因此检验的拒绝域的形式为

$$R = \{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) : F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) < c_1 \text{ 或 } F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) > c_2\}.$$

注意到 $2m\lambda_1\overline{X}\sim\chi^2_{2m}$, $2n\lambda_2\overline{Y}\sim\chi^2_{2n}$, 所以在 H_0 下,

$$F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{c\overline{X}}{\overline{Y}} \sim F_{2m,2n}.$$

由显著性水平 α 要求知 $c_1 = F_{2m,2n}(1-\alpha/2)$, $c_2 = F_{2m,2n}(\alpha/2)$.