2024年春季学期概率论H期末考试

授课教师：刘党政

第一大题（10'）（二选一作答即可）

(1)写一个概率论与其他学科有关的例子

(2)写出一个矩母函数只有纯虚零点的随机变量

第二大题（20'）

计算Wigner半圆律的矩并验证Riesz条件

第三大题（20'）

计算 n 元正态分布 $N(\mu,\sum)$ 的熵

第四大题（20'）

证明Curie − Weiss模型中配分函数满足

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log Z_{N,\beta,h}=\max_{m\in[-1,1]}\beta dm^2+\beta hm+S(m)$$

第五大题（20'）

$\mathrm{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n}$是一列独立随机变量，且满足 $\mathrm{E[X_i]=E[Y_i],E[X_i^2]=E[Y_i^2]}$，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 三阶可微，$\mathrm{U=(X_1,\ldots,X_n),V=(Y_1,\ldots,Y_n)}$

证明对任何可微函数$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $K>0$，有

$$|\mathrm{E}[g(f(\mathrm{U}))]-\mathrm{E}[g(f(\mathrm{V}))]|\le C_2(g)\lambda_3(f)\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{E}[|\mathrm{X_i}|^3I_{|\mathrm{X_i}|\le K}]+\mathrm{E}[|\mathrm{Y_i}|^3I_{|\mathrm{Y_i}|\le K}])$$

$$+C_1(g)\lambda_2(f)\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{E}[\mathrm{X_i}^2I_{|\mathrm{X_i}|>K}]+\mathrm{E}[\mathrm{Y_i}^2I_{|\mathrm{Y_i}|>K}])$$

其中 $C_2(g)=\frac{1}{6}||g'||_\infty+\frac{1}{2}||g''||_\infty+\frac{1}{6}||g'''||_\infty\quad C_1(g)=||g'||_\infty+||g''||_\infty$

$$\lambda_r(f)=\sup\{|\partial_i^pf|^{\frac{r}{p}}:1\le i\le n,1\le p\le r\}$$

Hint: 令$\mathrm{Z_i=(X_1,\ldots,X_i,Y_{i+1},\ldots,Y_n)}$，$\mathrm{W_i=(X_1,\ldots,0,Y_{i+1},\ldots,Y_n)}$，并定义$h(\mathrm{Z_i})=g(f(\mathrm{Z_i}))$，将$h$在$\mathrm{W_i}$处对$\mathrm{X_i}$进行展开

第六大题（20'）

$H_N=(h_{ij}^N)_{1\le i,j\le N}$为$N\times N$的对称矩阵，$\{h_{ij}^N:1\le i\le j\le N\}$为独立同分布随机变量，均同分布于$Y$，其中$Y$奇阶矩为零，偶阶矩有界，且$\mathrm{E}[Y^2]=1$。

定义 $X_{k,N}=\frac{1}{N}\mathrm{Tr}[(\frac{H_N}{\sqrt{N}})^k]$，$\gamma_k=\lim\limits_{N\to\infty}\mathrm{E}[X_{k,N}]$

(i)写出γ_k　　(ii)证明 $X_{k,N}\xrightarrow{P}\gamma_k$　　(iii)证明$X_{k,N}\xrightarrow{a.s.}\gamma_k$