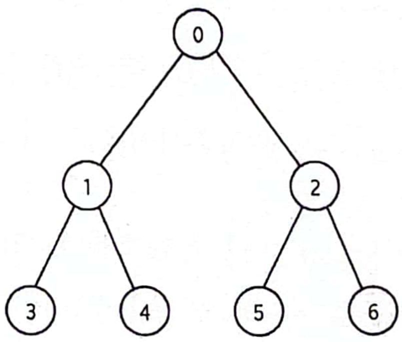
中国科学技术大学

2022 级统计学专业《实用随机过程》期末考试试题

所有试题解答写在答题纸上，答案写在试卷上无效

（考试时间：2024-06-16）

1. (每小题 6 分, 总 30 分) 设有一个质点在如图所示的二叉树上 (共 $m=3$ 层) 作随机游走: 它从顶点 0 出发, 每隔单位时间等概率沿边转移到某一个邻点上. 以 X_n 表示该质点经过 n 步跳之后所在顶点的编号, 则 $\{X_n, n \ge 0\}$ 为一个 Markov 链.



(1) 试写出 $\{X_n, n \ge 0\}$ 的一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}_3$.

(2) 对任意顶点 k $(0 \le k \le 6)$, 讨论其周期性和常返性.

(3) 对任意顶点 k $(0 \le k \le 6)$, 求质点从 k 出发后第一次返回到 k 所需平均步数 μ_k.

(4) 在稳态条件下, 该 Markov 链是否都是时间可逆的? 证明你的结论.

(5) 对一般的 m $(m \ge 1)$, 试求该 Markov 链的平稳分布.

2. (每小题 7 分, 总 21 分) 考察一个出租车的车站, 出租车与顾客分别按速率为每分钟 1 辆和每分钟 2 人的 Poisson 过程到达. 无论有多少辆出租车在那里, 新来的出租车都会等待; 然而, 若顾客到来发现没有出租车就会离去.

(1) 求在等待的出租车的平均数;

(2) 问到达的顾客中有多少比例的人能搭到出租车?

(3) 求该出租车的车站从出现没有出租车在等待的时刻开始到再次出现没有出租车在等待时的期望间隔时间.

3. (每小题 6 分, 总 12 分) 考虑一个连续时间的生灭过程 $\{X(t), t \geq 0\}$, 出生率为 $\{\lambda_i, i \geq 0\}$, 死亡率为 $\{\mu_j, j \geq 1\}$. 对给定的 $k > 0$, 当系统处于状态 k, 等待进入状态 $k+1$ 的等待时间记为 $T_{k,k+1}$; 当系统处于状态 k, 等待进入状态 $k-1$ 的等待时间记为 $T_{k,k-1}$.

(1) 问 $T_{k,k+1}$ 和 $T_{k,k-1}$ 分别服从什么分布?

(2) 问 $T_{k,k+1}$ 和 $T_{k,k-1}$ 是否相互独立?

4. (第 1 小题 7 分, 第 2 小题 12 分, 总 19 分). 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动.

(1) 对于人员 $0 < s < t$, 证明 $B(s) - \dfrac{s}{t}B(t)$ 与 $B(t)$ 相互独立.

(2) 给定 $B(1) = 0$, $B(3) = u \in \Re$, 求事件 $\{B(2) > u, B(4) > u\}$ 发生的概率.

5. (每小题 6 分, 总 18 分) 设 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列, f_0 和 f_1 是两个概率密度函数, 且满足对任意 $x \in \Re$, 有 $f_0(x) > 0$, $f_1(x) > 0$. 定义

$$X_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{f_1(Y_i)}{f_0(Y_i)}.$$

(1) 证明: 如果 f_0 为 Y_1 的概率密度函数, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个鞅序列.

(2) 证明: 如果 f_1 为 Y_1 的概率密度函数, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为一个下鞅序列.

(3) 证明: 如果 f_0 为 Y_1 的概率密度函数, 则对任意 $a > 0$,

$$\mathsf{P}(\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}) \leq \frac{1}{a}, \quad n > 1.$$

$>a$