中 国 科 学 技 术 大 学
2023 - 2024学年第二学期期末考试试卷

考试科目：　线性代数（B1）　得分：________

所在院、系：________　姓名：________　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复查							

注：若无特别说明, 所有问题均在复数域 $\mathbb{C}$ 中考虑.

一、【每小题5分, 共30分】填空题:

1. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}(x, y, z)^{\mathrm{T}} = (-x+y+2z,\ 2x+2y-2z,\ x+5y+z)^{\mathrm{T}}$. 则 $\mathcal{A}$ 将 $\mathbb{R}^3$ 映射后的像的集合是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间, 称为 $\mathcal{A}$ 的像空间,记为 $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$. 给出 $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$ 的任意一组基 ________________.

2. 已知 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$, 其中 $P = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}$. 取 $Q = \begin{pmatrix}\alpha-\beta & \beta & \beta+\gamma\end{pmatrix}$, 则 $Q^{-1}AQ =$ ________________.

3. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & x & -2\\ -2 & -2 & y\end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix}2 & & \\ & z & \\ & & 2\end{pmatrix}$ 相似, 则 $z =$ ________.

4. 设 A 为 3 阶方阵, 满足 $\det(A+cI_3)=0$, $(c=1, 2, 3)$. 则对任意的 k, $\det(A+kI_3) =$ ________.

5. 设欧氏空间 V 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的度量矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$. 考虑 V 中向量 $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3$. 则 β 的长度为 ________.

6. 已知实二次型 $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + tx_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3$ 正定. 则参数 t 的取值范围是 ________________.

装订线　答题时不要超过此线

二、　【每小题5分（判断正误2分，理由3分），共20分】

判断题：判断下列命题是否正确, 并简要说明理由或举出反例.

1. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 则 A 与它的伴随矩阵 A^* 必相合.

2. 设 V 是 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换. 若 $\mathcal{A}$ 在 V 的任意基下的矩阵都相等, 则 $\mathcal{A}$ 是 V 上的数乘变换.

3. 设 A, B 为 n 阶正交矩阵, 满足 $|A|+|B|=0$. 则 $|A+B|=0$.

4. 设 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & D \end{pmatrix}$ 为实对称正定矩阵，其中 A, D 皆为 n 阶方阵. 则有 $|M| \leq |A||D|$, 且等号成立当且仅当 $B=O$.

三、【5+10=15分】

设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 将

$$\alpha_1 = (0,\ 0,\ 1)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_2 = (0,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}, \quad \alpha_3 = (1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$$

变换到

$$\beta_1 = (-3,\ 1,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \beta_2 = (-3,\ -1,\ 0)^{\mathrm{T}}, \quad \beta_3 = (5,\ 1,\ 4)^{\mathrm{T}}.$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵 A.

(2) 求 $\mathbb{R}^3$ 中的另一组基 ξ_1, ξ_2, ξ_3, 使得 $\mathcal{A}$ 在 ξ_1, ξ_2, ξ_3 下的矩阵为对角阵 C, 并写出 C.

四、【2+8=10分】

记 V 为所有的 2 阶实对称方阵构成的实线性空间. 对于 V 中任意两个矩阵, 定义

$$(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$$

易知 $(V, (\cdot, \cdot))$ 构成一个欧式空间.

(1) 考虑 V 中向量 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 将 A_1, A_2 扩充成 V 的一组基 Γ_1.

(2) 利用 Schmidt 正交化, 从 Γ_1 构造 V 的一组标准正交基 Γ_2.

五、【12+5=17分】考虑二次曲面

$$x^2 - y^2 - 4xz - 4yz + 2y + z = 0 \qquad (\star)$$

(1) 通过旋转和平移变换将 $(\star)$ 化为标准形式. 写清楚变换过程和最后的标准方程, 并指出该曲面的类型.

(2) 求(1)中所用旋转变换的旋转轴的方向及旋转角度.

六、【8分】考虑实对角阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$, 其中 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$.

设 P, Q 为 n 阶正交矩阵, 且 $PA = AQ$. 证明: $P = Q$.