现代偏微分课程小测二

1. (20 分) (a). 设 $n \geq 2,\ p \geq 1$, 若 $log|x| \in W^{1,p}(B_1^n)$, 求 p 的取值范围.

(b). 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是连通区域, $u \in W^{1,p}(U)$ 且 $Du = 0$ a.e. in U, 求证:$u = C$a.e. in U.

2. (20 分) (a) 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $\partial U \in C^1$, $u \in W_0^{1,p}(U)$ 且 $1 \leq p < n$, 则对任意 $q \in [1, p^*]$，存在只依赖于 $p,\ q,\ n,\ U$ 的常数 C 使得

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

(b). 仿照 Poincaré 不等式的证明过程，证明:$U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界 C^1 区域, 设 $V \subset\subset U$ 开, 则对 $\forall u \in W^{1,2}(U)$ 有

$$\int_U u^2 dx \leq C(\int_U |Du|^2 dx + \int_V u^2 dx).$$

3. (30 分) 设 $a_{ij} \in C^1(\overline{U}),\ 0 < \lambda I \leq (a_{ij}) \leq \Lambda I,\ b_i \in L^\infty(U),\ \partial U \in C^1,\ f \in L^\infty(U)$, 若 u 是方程

$$\begin{cases} -\sum_{i,j}(a_{ij}u_i)_j + \sum_i b_i u_i = f, & in\ U \\ u = 0, & on\ \partial U \end{cases} \tag{1}$$

的光滑解:

(a). 对 $\forall V \subset\subset U$，求证:$\int_V |Du|^2 dx \leq C\int_U (u^2 + f^2)dx$, 这里 C 依赖于 $V,\ U,\ L$ 的系数;

对 $\forall x_0 \in \partial U,\ r \leq diam(U)$, 有 $\int_{B_{r/2}(x_0)\cap U} |Du|^2 dx \leq C\int_{B_r(x_0)\cap U}(u^2 + f^2)dx$, 这里 C 依赖于 r 和 L 的系数;

(b). 对 $\forall V \subset\subset U$，求证:$\int_V |D^2u|^2 dx \leq C\int_U (u^2 + f^2)dx$, 这里 C 依赖于 $V,\ U,\ L$ 的系数.

(c). 求证:$\int_U |D^2u|^2 dx \leq C\int_U (u^2 + f^2)dx$,, 这里 C 依赖于 U 和 L 的系数.

4. (30 分) (a). 考虑特征值问题

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & in\ U = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \\ u = 0, & on\ \partial U \end{cases} \tag{2}$$

试求第一、第二特征值及特征函数.

(b). 考虑方程

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{5}{4}u = x - asinx, & in\ U = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \\ u = 0, & on\ \partial U \end{cases} \tag{3}$$

问 a 取多少时，方程存在解?

(c). 考虑

$$\begin{cases} \Delta u + u = f, & in\ U = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \\ u = 0, & on\ \partial U \end{cases} \tag{4}$$

这里 $f \in L^2(U)$, 求证: 该方程存在唯一弱解 $u \in H_0^1(U)$ 且 $\|u\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$，并求出合适的 C.

5. (20 分) 设 $n \geq 3$, $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$, $0 < \lambda I \leq (a_{ij}) \leq \Lambda I$, $c \in L^\infty(B_1)$, 考虑方程 $-\sum_{i,j}(a_{ij}u_i)_j + cu = 0\ in\ B_1(0)$, 设 $u > 0$, $u \in C^\infty(B_1)$ 是方程的弱解,

(a). 证明: 对 $\forall p \geq 2$, $0 < r < R \leq 1$, 有

$$\left(\int_{B_r} u^{\frac{np}{n-2}} dx\right)^{\frac{n-2}{np}} \leq \frac{C}{(R-r)^{\frac{2}{p}}}\left(\int_{B_R} u^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中, C 依赖于 n, p, $|c|_{L^\infty}$, λ, Λ;

(b). 记 $\chi = \frac{n}{n-2}$, 取合适的 $P_k = p\chi^k$, $r_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}$ 迭代 (a) 得到: 对 $\forall p \geq 2$ 有

$$\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \leq C\|u\|_{L^p(B_1)}$$

其中, C 依赖于 n, p, $|c|_{L^\infty}$, λ, Λ.

1.(a) 解：要证 $\log|x| \in W^{1,p}(B_1^n)$

只须证 $\log|x| \in L^p$，其弱导数 $D\log|x| \in L^p$ 即可。

$$\int_{B_1(0)} |\log|x||^p dx = |S^{n-1}| \int_0^1 |\log r|^p \cdot r^{n-1} dr$$

$< +\infty \quad (n \geq 2, \ p \geq 1)$

$$D_i \log|x| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{x_i}{|x|} = \frac{x_i}{|x|^2}$$

$$|D\log|x|| = \frac{1}{|x|}$$

容易验证其也为弱导数。

$$\int_{B_1(0)} |D\log|x||^p dx = |S^{n-1}| \int_0^1 \left(\frac{1}{r}\right)^p \cdot r^{n-1} dr$$

$$= |S^{n-1}| \int_0^1 r^{n-1-p} dr$$

则 $D\log|x| \in L^p \Leftrightarrow n-1-p > -1$

即 $p < n$.

综上所述 $1 \leq p < n$ 时，$\log|x| \in W^{1,p}(B_1^n)$.

(b) 证明：设 $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$，其中 $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$

η 是标准磨光算子，则对 $\forall V \subset\subset U$，有

$u_\varepsilon \in C^\infty(V)$. 由 $Du = 0$ a.e. 可知

$$Du_\varepsilon = \eta_\varepsilon * Du = 0 \quad a.e.$$

则 $u_\varepsilon = C_\varepsilon$ in V，C_ε 为常数.

在任意 $V \subset\subset U$ 中，

有 $u_\varepsilon \xrightarrow{L^p} u$

而 C_ε 有界即 $C_\varepsilon \to C$ 当 $\varepsilon \to 0$

即 $u = C$ a.e. in V.

由 V 的任意性 $u = C$ a.e. in U

2. (a) 解：$U \subset \mathbb{R}^n$ 有界，则由 Hölder 不等式

只须证 $q = p^*$ 时不等式成立即可.

因为 $u \in W_0^{1,p}(U)$，则存在 $u_m \in C_c^\infty(U)$

s.t. $u_m \to u$ in $W^{1,p}(U)$.

对每个 u_m 由 GNS 不等式可知

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|Du_m\|_{L^p(U)} \quad (*)$$

(只须将 u_m 在 $\mathbb{R}^n - U$ 外零延拓即可)

因为 u_m 是 $L^{p^*}(U)$ 中的 Cauchy 列

则有 $u_m \to u$ in $L^{p^*}(U)$

在 $(*)$ 中令 $m \to +\infty$ 可得

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)}$$

进而由 U 有界和 Hölder 不等式可得

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C\|u\|_{L^{p^*}(U)}$$

$\forall\ 1 \leq q \leq p^*$.

□.

(b) 证明：(参考第十八次课时，对 Poincaré 不等式的证明方法，即反证法).

假设不成立，则存在 $\{u_k\} \in W^{1,2}(U)$

使得

$$\int_U u_k^2 dx \geq k\left(\int_U |Du_k|^2 dx + \int_V u_k^2 dx\right)$$

不妨令 $\int_U u_k^2 dx = 1$

$$\Rightarrow \int_U |Du_k|^2 dx \leq \frac{1}{k}$$

$$\int_V u_k^2 dx \leq \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow \quad Du_k \to 0$ in $L^2(U)$. 则

$\{u_k\} \subset W^{1,2}(U)$ 有界，$\exists$子列 $u_k \to u$ in $W^{1,2}(U)$ $\Rightarrow Du=0$

由于 $W^{1,2}(U) \hookrightarrow L^2(U)$ 紧

则 $u_k \to u$ in $L^2(U)$ 即

$\int_U u^2 dx = 1$ 且 $u \overset{a.e.}{=} 0$ in V

因为 $Du=0$ in U 及 $u \overset{a.e.}{=} 0$ in V.

$\Rightarrow \quad u=0$ a.e. in U 与

$\int_U u^2 dx = 1$ 矛盾. $\square$

3. (a) 证明: 因为 u 是方程的光滑解

则对 $\forall\, v \in C_0^\infty(U)$ 有

$$(*) \int_U a_{ij} D_i u D_j v + \int_U b_i u_i v = \int_U f v$$

令 $2d = \mathrm{dist}(V, \partial U)$

$W = \{x \in U : \mathrm{dist}(x, \partial U) \geq d\}$

取 $\xi \in C_0^\infty(U)$ s.t.

$$\begin{cases} \xi = 1 & \text{in } V \\ 0 \leq \xi \leq 1 & \\ \xi = 0 & \text{in } W^c. \end{cases}$$

在$(*)$中取 $v = \xi^2 u$，则

$$\underbrace{\int_U a_{ij} u_i \cdot 2\xi\xi_j u\, dx}_{②} + \underbrace{\int_U a_{ij} u_i u_j \cdot \xi^2 dx}_{①} + \underbrace{\int_U b_i u_i \xi^2 u\, dx}_{③} = \underbrace{\int_U \xi^2 f u\, dx}_{④}$$

$$① \geq \int_U \xi^2 \lambda |Du|^2 dx$$

$$|②| \leq \frac{\lambda}{4} \int_U \xi^2 |Du|^2 + \frac{1}{\lambda} a_{ij}^2 \xi_i^2 u^2 dx$$

$$\leq \frac{\lambda}{4} \int_U \xi^2 |Du|^2 + \frac{\Lambda^2}{\lambda} \int_U \xi_i^2 u^2 dx$$

$$|③| \leq \frac{\lambda}{4} \int_U \xi^2 |Du|^2 + C \int_U \xi^2 u^2 dx$$

$$|④| \leq \int_U \frac{1}{2}\xi^2 f^2 + \int_U \frac{1}{2}\xi^2 u^2 dx$$

则可得

$$\frac{\lambda}{2} \int_U \xi^2 |Du|^2 dx \leq \tilde{C} \int_U u^2 + \frac{1}{2}\int_U f^2 + \frac{1}{2}\int_U u^2 dx$$

则有 $\int_V |Du|^2 dx \leq C\left(\int_U u^2 + \int_U f^2\right)$.

因为 $\partial U \in C^1$，则可微分同胚，设 $W = B_r(x_0)$

$y = \Phi(x) \qquad x = \Psi(y)$

$x = (x', x_n) \qquad y = (y', y_n)$

$\det\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| = 1 \qquad \det\left|\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right| = 1$

$$\begin{cases} y' = x' \\ y_n = x_n - \varphi(x') \end{cases}$$

$\bar{u}(y) := u(\Psi(y))$

则 $\bar{u}$ 满足方程

$$\sum (\tilde{a}_{ij} \bar{u}_i)_j + \sum (\tilde{b}_i \bar{u}_i) = \tilde{f}$$

其中 $\tilde{a}_{ij} \xi_i \xi_j = a_{kl} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \xi_i\right)\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_l} \xi_j\right)$

$= a_{kl} \eta_k \eta_l \geq \lambda |\eta|^2$ 一致椭圆.

则由平坦边界估计以及微分同胚可得

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap U} |Du|^2 \leq \int_{B_r(x_0) \cap U} (u^2 + f^2)\, dx.$$

(b). 证明：取 ξ 同(a)。因为 u 是光滑解，取 $v = -D_k(\xi^2 D_k u)$ 则可得

$$\int_U a_{ij} u_i (-D_k \xi^2 D_k u)_j + \int_U b_i u_i (-D_k \xi^2 D_k u) \quad ⑥$$

$$= \int_U f(-D_k(\xi^2 D_k u)) \quad ⑤$$

$$\int_U a_{ij} u_i (-D_k \xi^2 D_k u)_j = \int_U (\xi^2 D_k u_j (a_{ij} u_i)_k dx$$

$$= \int_U a_{ij} \xi^2 u_{ik} u_{jk} \ ① + \int_U a_{ij,k} u_i u_k 2\xi \xi_j \ ②$$

$$+ \int_U a_{ij} u_k u_{ki} 2\xi_i \xi_j \ ③ + \int_U a_{ij,k} u_i \xi^2 u_{kj} \ ④$$

$$① \geq \lambda \int \xi^2 |D_k Du|^2 dx$$

$$|②| \leq C_0 \int_W |Du|^2 dx$$

$$|③+④| \leq \frac{\lambda}{4} \int_W \xi^2 |D_k Du|^2 dx + C_0 \int_W |Du|^2 dx$$

$$|⑤| \leq \frac{\lambda}{8} \int_U \xi^2 |D_k Du|^2 dx + C_0 (\|f\|^2_{L^2(U)} + \|Du\|^2_{L^2(W)})$$

$$|⑥| \leq \frac{\lambda}{8} \int_U \xi^2 |D_k Du|^2 dx + C_0 \|Du\|^2_{L^2(W)}$$

综合①②③④⑤⑥以及(a)的结果可得

$$\int_V |D_k Du|^2 dx \leq \tilde{C} \int (u^2 + f^2) dx$$

故 $\int_V |D^2 u|^2 dx \leq C \int_U (u^2 + f^2) dx$.

(C) 由单位分解引理可得，只须证收边界正则性即可。

对 $\forall x_0 \in \partial U$，取小邻域 W，由于 $\partial U \in C^1$，则存在微分同胚

$\Phi: W \to \Phi(W)$ s.t.

$\Phi(W) = B_r^+(0)$

$y = \Phi(x) \quad x = \Psi(y)$

$\det |\frac{\partial \Phi}{\partial x}| = 1 \quad \det |\frac{\partial \Psi}{\partial y}| = 1$

$$\begin{cases} y' = x' & y = (y', y_n) \\ y_n = x_n - \varphi(x') & x = (x', x_n) \end{cases}$$

$\tilde{u}(y) := u(\Psi(y))$.

则仍有一致椭圆方程

$$-(\tilde{a}_{ij} \tilde{u}_i)_j + \sum \tilde{b}_i \tilde{u}_i = \tilde{f}$$

而在 $B_r^+(0)$ 上，对于 $\tilde{u}_{ij}$，$i+j \leq 2n-1$ 取(b)中类似的测试函数即可得 L^2 估计。而对于 $\tilde{u}_{nn}$，因为 $\tilde{a}_{ij} \in C^1$

$$\tilde{a}_{nn} \tilde{u}_{nn} = -\sum_{i+j \leq 2n-1} \tilde{a}_{ij} \tilde{u}_{ij} + (\tilde{b}_i - \tilde{a}_{ij,j}) \tilde{u}_i - \tilde{f}$$

由一致椭圆性 $\exists \tilde{\lambda}$ s.t. $a_{nn} \geq \tilde{\lambda} > 0$

于是

$$\tilde{u}_{nn} = -\frac{1}{\tilde{a}_{nn}} \Big(\sum_{i+j \leq 2n-1} \tilde{a}_{ij} \tilde{u}_{ij} + (\tilde{b}_i - \tilde{a}_{ij,j}) \tilde{u}_i - \tilde{f} \Big)$$

则有：

$$\int_{B_r^+(0)} |\tilde{u}_{nn}|^2 \leq C (\|\tilde{u}\|^2_{L^2} + \|\tilde{f}\|^2_{L^2})$$

即对平坦边界成立估计，而由微分同胚即可得

$$\int_W |D^2 u|^2 dx \leq C_0 (\|u\|^2_{L^2} + \|f\|^2_{L^2})$$

再结合(b)即可得整体估计

4.(a) 解：由分离变量法 设 $u=X(x)Y(y)$

则由方程可得

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0$$

即 $$\underbrace{\frac{X''}{X}}_{=\alpha} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{=\mu} = -\lambda$$

即有 $$\begin{cases} Y'' + \mu Y = 0 \\ Y(0) = Y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

可得 $\mu = \frac{m^2}{4}$，$Y_m = \sin(\frac{m}{2}y)$

设 $\lambda - \mu = \alpha$

同理有 $$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0 \\ X(0) = X(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$\alpha = \frac{n^2}{4}$ $X_m = \sin(\frac{n}{2}x)$

则 $\lambda = \frac{1}{4}(m^2+n^2)$

第一特征值为 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$，对应特征函数为

$C\sin(\frac{x}{2})\sin(\frac{y}{2})$.

第二特征值为 $\lambda_2 = \frac{5}{4}$ 对应特征函数为

$C_1\sin(\frac{x}{2})\sin(y) + C_2\sin(x)\sin(\frac{y}{2})$.

(b). 设 $\mathcal{L}u = \Delta u + \frac{5}{4}u$

则 $\mathcal{L}^*v = \Delta v + \frac{5}{4}v$

则根据 Fredholm 二择一定理可得

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = x - a\sin x & \text{in } V \\ u = 0 & \text{on } \partial V \end{cases}$$

有解当且仅当 $f(x,y) = x - a\sin x$ 与

$$\begin{cases} \mathcal{L}^*v = 0 & \text{in } V \\ v = 0 & \text{in } V \end{cases}$$ 的解空间正交

由(a)结论

可得

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(x - a\sin x)\sin(\tfrac{x}{2})\sin y = 0 \quad ①$$

且 $$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(x - a\sin x)\sin x\sin\tfrac{y}{2} = 0 \quad ②$$

① = 0 平凡

$$② = \int_0^{2\pi}(x - a\sin x)\sin x\,dx \int_0^{2\pi}\sin\tfrac{y}{2}\,dy$$

$$= 4\int_0^{2\pi}(x - a\sin x)\sin x\,dx$$

$\Rightarrow a = -2$. 。

(c). $\mathcal{L}u = \Delta u + u$ $\lambda = 1$ 不为特征值

则由 Fredholm 二择一定理可得存在唯一弱解，由 Hilbert-Schmidt 定理

记 $u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k u_k$，其中 u_k 满足

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda_k u = 0 \\ u|_{\partial V} = 0 \end{cases} \qquad \|u_k\|_{L^2} = 1$$

$d_k = \langle u, u_k\rangle_{L^2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \|u\|_{L^2}^2$

而 $$f = \mathcal{L}u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\mathcal{L}u_k$$

$$= d_k(1-\lambda_k)u_k$$

因此 $$\|f\|_{L^2}^2 = \sum d_k^2(1-\lambda_k)^2$$

$$\geq \frac{1}{16}\|u\|_{L^2}^2.$$

i.e. $\|u\|_{L^2} \leq 4\|f\|_{L^2}$ 。

5. (a) 证明：设 ξ 为截断函数满足 $\xi \in C_c^\infty(B_R)$

$$\begin{cases} \xi = 1 & \text{in } B_r \\ 0 \le \xi \le 1 \\ \xi = 0 & \text{on } B_R^c \end{cases} \qquad |D\xi| \le \frac{C}{R-r}$$

由弱解的定义得

$$\int a_{ij} u_i v_j + cuv = 0 \quad \text{in } B_1 \quad \forall v \in C_c^\infty(B_1)$$

取 $v = \xi^2 u^{p-1}$ 可得

$$\int_{B_1} a_{ij} u_i (\xi^2 u^{p-1})_j = \int_{B_1} a_{ij} u_i \big(\underset{②}{2\xi\xi_j u^{p-1}} + (p-1)\xi^2 u^{p-2} u_j \big) = \int_{B_1} c\xi^2 u^p$$

$$\int_{B_1} a_{ij} u_i u_j \cdot (p-1)\xi^2 u^{p-2} \ge \underset{①}{\lambda(p-1)\int_{B_1} \xi^2 u^{p-2} |Du|^2}$$

因为 $|Du^{\frac{p}{2}}| = \frac{p}{2} u^{\frac{p-2}{2}} |Du|$

则得 $|Du^{\frac{p}{2}}|^2 = \frac{p^2}{4} u^{p-2} |Du|^2$

即

$$① = \frac{4\lambda(p-1)}{p^2} \int \xi^2 |Du^{\frac{p}{2}}|^2$$

$$|②| \le \varepsilon\Lambda \int \xi^2 u^{p-2} |Du|^2 + \frac{\Lambda}{\varepsilon} \int |D\xi|^2 u^p dx$$

令 $\varepsilon = \frac{\lambda(p-1)}{2\Lambda}$ 则利用方程有

$$\frac{2\lambda(p-1)}{p^2} \int_{B_1} \xi^2 |Du^{\frac{p}{2}}|^2 \le \frac{2\Lambda^2}{\lambda^2(p-1)} \int_{B_1} |D\xi|^2 u^p dx + \int_{B_1} c\xi^2 u^p$$

因为 $|D(\xi u^{\frac{p}{2}})|^2 \le 2\xi^2 |Du^{\frac{p}{2}}|^2 + 2|D\xi|^2 u^p$

则可得 $\int_{B_1} D(\xi u^{\frac{p}{2}})^2 \le C \int_{B_1} (|D\xi|^2 + \xi^2) u^p$

再由 Poincare 不等式 以及 ξ 的定义得

$$\left(\int_{B_r} u^{\frac{np}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{np}} \le \frac{C}{(R-r)^{\frac{2}{p}}} \left(\int_{B_R} u^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) 我们有 $r_0 = 1$

$r_\infty = \frac{1}{2}$

对每一个 r_i 与 r_{i-1} 我们有

$$\left(\int_{B_{r_i}} u^{\frac{np_i}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{np_i}} \le \frac{C^{\frac{1}{p_i}}}{(r_{i-1}-r_i)^{\frac{2}{p_i}}} \left(\int_{B_{r_{i-1}}} u^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\le C^{\frac{1}{p_i}} 4^{\frac{i}{p_i}} \left(\int_{B_{r_{i-1}}} u^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}$$

依次迭代有

$$\left(\int_{B_{r_m}} u^{p_{m+1}} \right)^{\frac{1}{p_{m+1}}} \le C^{\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}} 4^{\sum_{i=1}^m \frac{i}{p_i}} \left(\int_{B_1} u^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

因为 p_k 为等比数列

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = p \cdot \frac{\chi^m - 1}{\chi - 1} \xrightarrow{m \to +\infty} \frac{-p}{\chi - 1} < \infty$$

$\sum_{i=1}^\infty \frac{i}{p_i} < +\infty$ (由错位相减求和取极限)

综上，令 $m \to +\infty$ 可得

$$\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \le C \|u\|_{L^p(B_1)}$$

注记：关于 3(a) 第二小问，是近边估计，实际上依然

可取 $V=\xi^2 u$

$\xi\in C^\infty$　　$\xi=\begin{cases}1 & \text{in } B_{\frac{1}{2}}(x_0)\\ 0 & \text{in } B^c_{\frac{3}{4}}(x_0)\\ |D\xi|\le C\end{cases}$

关于 5(b)，C 实际依赖于 P_i，但 C 可分解为类似 $1+\frac{b}{P_i-1}$ 形式，a,b 不依赖于 P_i，乘积形式收敛性与上方类似。