现代偏微分课程小测

1. (1).(10 分) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 有界区域，考虑极小曲面方程 $\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{ij}=0$，其中 $u\in C^3(\overline{\Omega})$，$a_{ij}(Du)=(1+|Du|^2)\delta_{ij}-u_iu_j$，记 $\varphi=|Du|^2$，求证: $\max\limits_{\overline{\Omega}}\varphi=\max\limits_{\partial\Omega}\varphi$.

(2).(10 分) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 有界区域，考虑平均曲率方程 $H(u)\overset{\Delta}{=}\sum_{i=1}^{2}D_i(\frac{u_i}{\sqrt{1+|Du|^2}})=f(x)$，即 $\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}u_{ij}=f(x)(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}$，其中 $u\in C^3(\overline{\Omega})$，$f\in C^1(\overline{\Omega})$，求证: $\max\limits_{\overline{\Omega}}|Du|\le C(\max\limits_{\partial\Omega}|Du|+1)$，其中 C 依赖于 $|u|_{L^\infty}$，$|f|_{C^1}$.

(Hint: 考虑辅助函数 $\varphi=e^{\alpha_0u}|Du|^2$，$\alpha_0$ 充分大待定.)

2. (Harnack's 不等式) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界区域，$a_{ij}\in C^2(\overline{\Omega})$ 且 $0<\lambda I\le(a_{ij})\le\Lambda I<\infty$，设 $u\in C^3(\overline{\Omega})$ 是 $\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{ij}=0$，$u>0$ in Ω 的解.

(1).(10 分) 求证: 对 $\forall B_{2r}(x_0)\subset\subset\Omega$，有 $\sup\limits_{B_r(x_0)}|D(log u)|\le\frac{C}{r}$，其中 C 依赖于 a_{ij} 和 n.

(2).(5 分) 求证: 对 $\forall\Omega'\subset\subset\Omega$ 连通，有 $\sup\limits_{\Omega'}u\le C\inf\limits_{\Omega'}u$，其中 C 依赖于 Ω', Ω, a_{ij} 和 n.

3. (Pohozaev 恒等式) 设 $u\in C^2(\overline{\Omega})$ 是方程

$$\begin{cases}\Delta u+|u|^{p-1}u=0, & in\ \Omega\\ u=0, & on\ \partial\Omega\end{cases}\tag{1}$$

的解，其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 关于原点 O 是星状的且 $\partial\Omega\in C^1$，$n\ge3$，$p>1$.

(1).(10 分) 求证: $\frac{n-2}{2}\int_\Omega|Du|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|Du|^2(\nu\cdot x)d\sigma=\frac{n}{p+1}\int_\Omega|u|^{p+1}dx$，其中 ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向.

(2).(5 分) 求证: 若 $p>\frac{n+2}{n-2}$，则 $u\equiv0$ in Ω.

4. (1).(10 分) 设 u 满足 $\Delta u=0$ in $B_1^n\backslash\{0\}$，$|u|\le M$，$n\ge3$. 求证: u 可以延拓到 B_1^n 上使得 $\Delta u=0$ in B_1^n.

(2).(10 分) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 有界光滑，$p\in[2,+\infty)$，求证: $\|Du\|_{L^p}\le C\|u\|_{L^p}^{\frac{1}{2}}\|D^2u\|_{L^p}^{\frac{1}{2}}$，$\forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$，其中 C 依赖于 n，p.

5. 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是有界光滑区域，$0<T<\infty$，若 $u\in C^\infty(\overline{U}\times[0,T])$ 是方程

$$\begin{cases}u_t-\Delta u=f, & in\ U_T=U\times(0,T)\\ u=0, & on\ \partial U\times[0,T]\\ u=g, & on\ U\times\{t=0\}\end{cases}\tag{2}$$

的解，f，g 光滑;

(1).(10 分) 求证: $\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{L^2(U)}+\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}\leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{L^2(U)})$，其中 C 依赖于 U，T.(Hint: 乘 u 积分.)

(2).(10 分) 求证: $\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{H_0^1(U)}+\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(U))}\leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H_0^1(U)})$，其中 C 依赖于 U，T.(Hint: 乘 u_t 积分.)

(3).(10 分) 求证: $\max_{t\in[0,T]}\|u'(t)\|_{L^2(U)}+\|u'\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))}\leq C(\|f\|_{H^1(0,T;L^2(U))}+\|g\|_{H^2(U)})$，其中 C 依赖于 U，T.(Hint: 方程关于 t 求导后，乘 u_t 积分.)

6. (1).(10 分)(有限传播速度) 设 u 是 $u_{tt}-\Delta u=0$ in $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 的光滑解，设 $x_0\in\mathbb{R}^n$，$t_0>0$，记 $K\overset{\Delta}{=}\{(x,t): |x-x_0|\leq t_0-t\}$，$K_t\overset{\Delta}{=}\{x: |x-x_0|\leq t_0-t\}$，求证: 若 $u=u_t=0$ in K_0，则 $u\equiv 0$ in K.

(2).(10 分) 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 有界光滑，$0<T<\infty$，设 u 是方程

$$\begin{cases} u_{tt}+du_t-\Delta u+cu=0, & in\ U_T=U\times[0,T] \\ u=0, & on\ \partial U\times[0,T] \\ u=u_t=0, & on\ U\times\{t=0\} \end{cases} \tag{3}$$

的光滑解，其中 d，c 是有界函数，求证:$u\equiv 0$ in $U\times[0,T]$.

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

期末考试参考答案

1.（作业题，之前也考过）/注意到 $\left\{\begin{array}{l}\sum_{ij} a_{ij}\partial_{ij} \text{ 以及} \\ \text{平均曲率方程 } H(u)=f(x)\end{array}\right\}$ 在转动坐标系下保持不变/ 即做正交变换

(1) Pf: 要证 $\sum_{ij} a_{ij}\varphi_{ij}\ge 0$ in Ω $\xRightarrow{MP}$ $\max_{\bar\Omega}\varphi=\max_{\partial\Omega}\varphi$

$\forall p\in\Omega$，在一点 (p) 计算，转动坐标系，不妨设 $\partial_{x_1}\parallel Du$ $\Rightarrow$ $u_1=|Du|,\ u_2=0$ at p

$$\varphi_i = 2u_k u_{ki},\quad \varphi_{ij} = 2u_{ki}u_{kj}+2u_k u_{kij}$$

$$\Rightarrow \sum_{ij} a_{ij}\varphi_{ij} = \underbrace{2\sum_{ij} a_{ij}u_{ki}u_{kj}}_{①} + \underbrace{2\sum_k u_k\Big(\sum_{ij}a_{ij}u_{ijk}\Big)}_{②}$$

方程：$\sum_{ij} a_{ij}u_{ij}=0 \xrightarrow{\text{求导}} \sum_{ij}(a_{ij}u_{ijk}+\partial_k a_{ij}\cdot u_{ij})=0$

$$\Rightarrow ② = -2\sum_{kij} u_k\,\partial_k a_{ij}\cdot u_{ij} \underset{\uparrow}{=} -4\sum_{kl}u_ku_{kl}u_l\Delta u + 4\sum_{ijk} u_k u_{ik} u_j u_{ij}$$

$$\left(\partial_k a_{ij} = 2u_l u_{lk}\delta_{ij} - u_{ik}u_j - u_{jk}u_i\right)$$

$$= -4|Du|^2 u_{11}\Delta u + 4|Du|^2\sum_i u_{1i}^2$$

$$\ge -4|Du|^2u_{11}u_{22} = \frac{4|Du|^2}{1+|Du|^2}u_{11}^2 \ge 0 \quad \text{at } p$$

(at p 有 $(a_{ij})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1+|Du|^2\end{pmatrix}$，方程 $\sum_{ij}a_{ij}u_{ij}=0 \Rightarrow u_{11}+(1+|Du|^2)u_{22}=0$ at p)

显然 ①≥0 $\Rightarrow$ $\sum_{ij} a_{ij}\varphi_{ij}\ge0$ in Ω #

(2) Pf: 考虑辅助函数 $\varphi = e^{\alpha u}|Du|^2$，$\alpha>0$ 充分大待定.

设 $\max_{\bar\Omega}\varphi$ 在 $x_0\in\bar\Omega$ 达到

1) 若 $x_0\in\partial\Omega$，trivial

2) 若 $x_0\in\Omega$，不妨设 $|Du|(x_0)>1$（否则 $\varphi\le\varphi(x_0)\le C \Rightarrow \max_{\bar\Omega}|Du|\le C$）

考虑 $\phi=\log\varphi=\alpha u+\log|Du|^2$，则 ϕ 在 $x_0\in\Omega$ 达到局部最大值

$\Rightarrow$ at x_0 有 $0=\phi_i=\alpha u_i+\frac{2u_ku_{ki}}{|Du|^2} \to ①$，$0\ge(\phi_{ij}) = \left(\alpha u_{ij} + \frac{2u_{ki}u_{kj}+2u_ku_{kij}}{|Du|^2} - \frac{D_i(|Du|^2)D_j(|Du|^2)}{|Du|^4}\right) \to ②$

在 x_0 处，转动坐标系，不妨设 $u_1=|Du|,\ u_2=0$ $\Rightarrow$ $(a_{ij})=\begin{pmatrix}1&0\\0&1+|Du|^2\end{pmatrix}$ at x_0

① $\Rightarrow \quad u_{11} = -\frac{\alpha}{2}|Du|^2, \quad u_{12} = 0$

方程：$\sum_{ij} a_{ij} u_{ij} = f(x)\left(1+|Du|^2\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow (1+|Du|^2)u_{22} = f(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\alpha}{2}|Du|^2$ at x_0

② $\Rightarrow \quad 0 \geq \sum_{ij} a_{ij}\phi_{ij} = \alpha \sum_{ij} a_{ij} u_{ij} + \frac{2\sum_{ij} a_{ij} u_{ki} u_{kj}}{|Du|^2} + \frac{2\sum_k u_k\left(\sum_{ij} a_{ij} u_{ijk}\right)}{|Du|^2} - \sum_{ij} \frac{a_{ij} D_i(|Du|^2) D_j(|Du|^2)}{|Du|^4}$

$$\overset{①}{\underset{方程}{=}} \alpha f(x)(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{|Du|^2}\left[u_{11}^2 + (1+|Du|^2)u_{22}^2\right] + \underbrace{\frac{2\sum_k u_k\left(\sum_{ij} a_{ij} u_{ijk}\right)}{|Du|^2}}_{A}$$

$$- \alpha^2 \underbrace{\sum_{ij} a_{ij} u_i u_j}_{|Du|^2}$$

$$= \alpha f(x)(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha^2}{2}|Du|^2 + \underbrace{\frac{2}{|Du|^2(1+|Du|^2)}\left[f(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\alpha}{2}|Du|^2\right]^2}_{\geq 0}$$

$$+ A \rightarrow ⊗$$

方程求导 $\Rightarrow \sum_{ij}\left(a_{ij} u_{ijk} + \partial_k a_{ij} \cdot u_{ij}\right) = 3f(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}} u_l u_{lk} + f_k (1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{|Du|}\sum_{ij} a_{ij} u_{ij1} = -\frac{2}{|Du|}\sum_{ij}\partial_1 a_{ij} \cdot u_{ij} + \underbrace{6f(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}} u_{11} + \frac{2f_1 (1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}}{|Du|}}_{(\cdots)}$$

$\left(\partial_1 a_{ij} = 2|Du| u_{11}\delta_{ij} - u_{1i}u_j - u_{1j}u_i\right) \quad = -4u_{11}\Delta u + 4\sum_i u_{1i}^2 + (\cdots)$

$$= -4u_{11}u_{22} + (\cdots)$$

$$= \frac{2\alpha|Du|^2}{1+|Du|^2}\left[f(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{\alpha}{2}|Du|^2\right] - 3\alpha f(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}|Du|^2$$

$$+ \frac{2f_1}{|Du|}(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\alpha f(x)(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}|Du|^2 + \frac{\alpha^2|Du|^4}{1+|Du|^2} + \frac{2f_1}{|Du|}(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}$$

⊗ $\Rightarrow \quad 0 \geq \alpha^2\frac{|Du|^4}{1+|Du|^2} - \frac{\alpha^2}{2}|Du|^2 + \alpha f(x)\left((1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}} - (1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}|Du|^2\right) + \frac{2f_1}{|Du|}(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\frac{|Du|^4}{1+|Du|^2} - \frac{\alpha^2}{2}\frac{|Du|^2}{1+|Du|^2} + \alpha f(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2f_1}{|Du|}(1+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}$$

$|Du|(x_0) > 1 \rightarrow \; \geq \frac{\alpha^2}{4}|Du|^2 - C_1|Du|^2 - \frac{\alpha^2}{2} - C_1\alpha|Du| \qquad C_1 \sim |f|_{C^1} \quad \xRightarrow{取\alpha大} \quad C|Du|^2 - C|Du| - C \leq 0$

$\Rightarrow |Du|(x_0) \leq C$

#

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

2.(Harnack不等式) 见笔记和 Evan书

3.(Pohozaev恒等式) 见笔记和 Evan书

4.(1) 证: 只需证: $\int_{B_1} u \Delta\varphi \, dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(B_1)$, 即 u 分布意义下是调和的.

则由 Weyl引理 $\Rightarrow u \in C^\infty(B_1)$ 且 $\Delta u = 0$ in B_1.

考虑截断函数 $\rho \in C_c^\infty(B_{2\varepsilon})$ s.t. $\rho = 1$ in B_ε, $0 \le \rho \le 1$, $|\nabla^k \rho| \le \frac{C_{n,k}}{\varepsilon^k}$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(B_1), \int_{B_1} u \Delta\varphi \, dx = \underbrace{\int_{B_1} u \Delta(\varphi(1-\rho)) \, dx}_{\overset{\|}{0}\ \Delta u = 0 \text{ in } B_1 \setminus \{0\}} + \int_{B_1} u \Delta(\varphi\rho) \, dx$$

$$= \int_{B_1} u \cdot [\underbrace{\Delta\varphi \cdot \rho}_{①} + \underbrace{2\nabla\varphi \cdot \nabla\rho}_{②} + \underbrace{\varphi \Delta\rho}_{③}] \, dx$$

$\because |u| \le M \quad \therefore |①| \le CM\varepsilon^n$, $|②| \le CM\varepsilon^{n-1}$, $|③| \le CM\varepsilon^{n-2}$

当 $n \ge 3$ 时, 有 $|①+②+③| \le CM\varepsilon^{n-2} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

$$\Rightarrow \int_{B_1} u \Delta\varphi \, dx = 0, \forall \varphi \in C_c^\infty(B_1)$$

$$\overset{\text{Weyl引理}}{\Longrightarrow} u \in C^\infty(B_1), \Delta u = 0 \text{ in } B_1$$

#

4.(2) 证: $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$, $\exists v_k \in C_c^\infty(\Omega)$, $w_k \in C^\infty(\bar\Omega)$, s.t.

$v_k \xrightarrow{W^{1,p}} u$, $w_k \xrightarrow{W^{2,p}} u \Rightarrow |w_k|_{W^{2,p}} \le C$ (独立于k)

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla v_k \cdot \nabla w_k \cdot |\nabla w_k|^{p-2} \, dx \overset{v_k \in C_c^\infty(\Omega)}{=} -\int_\Omega v_k \cdot \mathrm{div}(|\nabla w_k|^{p-2} \nabla w_k) \, dx$$

$$\le C |v_k|_{L^p} |\nabla w_k|_{L^p}^{p-2} |\nabla^2 w_k|_{L^p}$$

$k\to\infty$ claim

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \qquad\qquad \downarrow k\to\infty$$

$$C|u|_{L^p} |\nabla u|_{L^p}^{p-2} |\nabla^2 u|_{L^p}$$

Claim: $\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \nabla v_k\cdot\nabla w_k|\nabla w_k|^{p-2}dx = \int_\Omega |\nabla u|^p dx$, $p\ge 2$

Pf of claim: 注意: $\nabla v_k\cdot\nabla w_k|\nabla w_k|^{p-2} = (\nabla v_k-\nabla w_k)\cdot\nabla w_k|\nabla w_k|^{p-2}+|\nabla w_k|^p$

$\because \left|\int_\Omega(\nabla v_k-\nabla w_k)\cdot\nabla w_k|\nabla w_k|^{p-2}dx\right| \le C|\nabla v_k-\nabla w_k|_{L^p}|\nabla w_k|_{L^p}^{p-1}$

$\le C|\nabla v_k-\nabla w_k|_{L^p} \to 0 \quad (k\to\infty)$

$\therefore \lim_{k\to\infty}\int_\Omega\nabla v_k\cdot\nabla w_k|\nabla w_k|^{p-2}dx = \lim_{k\to\infty}\int_\Omega|\nabla w_k|^p dx = \int_\Omega|\nabla u|^p dx$

#

5. 见笔记和Evans书

6.(1) 见笔记和Evans书

6.(2) Pf) 方程 $\times u_t$ 积分 $\Rightarrow \int_U u_t u_{tt} + d u_t^2 - \Delta u\cdot u_t + c u u_t\, dx = 0$

分部积分 (注意: $u_t=0$ on $\partial U\times[0,T]$)

$\int_U u_{x_i} u_{x_i t}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U (u_t^2+|\nabla u|^2)dx = -\int_U d u_t^2 dx + \int_U c u u_t dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U (u_t^2+|\nabla u|^2+u^2)dx = \int_U -d u_t^2 + (c+1) u u_t dx$

$\le C\int_U u_t^2+u^2 dx$

设 $\eta(t) = \int_U u_t^2(t)+|\nabla u|^2(t)+u^2(t)dx$, 则 $\eta'(t)\le C\eta(t)$

$\Rightarrow \eta(t)\le e^{Ct}\eta(0)=0$

$\Rightarrow u\equiv 0$ on $U\times[0,T]$

#

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 开区域，$n\geq 3$

注记（Weyl 引理）：设 $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$，若 $\langle u,\Delta\varphi\rangle=0$，$\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，则 $\exists v\in C^\infty(\Omega)$ 且 $\Delta v=0$ in Ω，s.t. $u=v$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$。

（$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$：Ω 上的分布（即 $C_c^\infty(\Omega)$ 的有界线性泛函））

Pf：对 $\forall$ 开集 $W\subset\subset\Omega$，设 f 是 W 的截断函数（即：$f=1$ in W，$0\leq f\leq 1$，$f\in C_c^\infty(\Omega)$）

考虑基本解 $\Gamma(r)=c_n r^{2-n}$，$\Gamma(x)\triangleq\Gamma(|x|)$，则有：$-\Delta\Gamma=\delta$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

（即：$-\int\Gamma\Delta\phi=\phi(0)\quad\forall\phi\in C_c^\infty$）

记 $A(x,y)=\Delta f(y)\Gamma(x,y)-2\nabla f(y)\cdot\nabla\Gamma(x-y)$，$x\in W$，$y\in\Omega$

则 由 $x\in W\Rightarrow\exists\varepsilon>0$，s.t. $B_\varepsilon(x)\subset W\Rightarrow$ 当 $y\in B_\varepsilon(x)$，有 $\Delta f(y)=0$，$\nabla f(y)=0\Rightarrow A(x,y)$ 良定 且 固定 x，有 $A(x,\cdot)\in C_c^\infty(\Omega)$

记 $v(x)=\langle u,A(x,\cdot)\rangle$，$x\in W\Rightarrow v\in C^\infty(W)$，$\Delta v=0$

对 $\forall g\in C_c^\infty(W)$，有：$\int_W v(x)g(x)\,dx=\langle u,\int_W A(x,\cdot)g(x)\,dx\rangle$

$$=\langle u(y),\ \Delta f(y)(\Gamma*g)(y)+2\nabla f(y)\cdot(\nabla\Gamma*g)(y)\rangle$$

$$=\langle u,\ \Delta(\underbrace{f\cdot\Gamma*g}_{C_c^\infty(\Omega)})-f\cdot(\Gamma*\Delta g)\rangle=\langle u,-f\cdot(\Gamma*\Delta g)\rangle$$

$$=\langle u,f\cdot g\rangle=\langle u,g\rangle\quad\Rightarrow\quad u|_W=v\ \text{in}\ \mathcal{D}'(\Omega)$$

对 $W_1\subset\subset W_2\subset\subset\Omega$，得到 $v_1=u|_{W_1}$，$v_2=u|_{W_2}$ $\overset{\text{in }\mathcal{D}'(\Omega)}{\Rightarrow}$ $v_2|_{W_1}=v_1$ $\overset{\text{拼接}}{\Rightarrow}$ $u=v$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ #

Cor：若 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$，$\int_\Omega u\Delta\varphi\,dx=0$，$\forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，则 $\exists v\in C^\infty(\Omega)$ 且 $\Delta v=0$ in Ω，s.t. $u\overset{a.e.}{=}v$。

Pf：由 Weyl 引理 $\Rightarrow$ $u=v$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ $\quad\because u,v\in L^1_{loc}(\Omega)$，$u=v$ in $\mathcal{D}'(\Omega)\Rightarrow\int_\Omega(u-v)\phi\,dx=0\quad\forall\phi\in C_c^\infty$

$\therefore$ 记 $w=u-v$，有：$0=\int_\Omega w\phi_\varepsilon\,dx=\int_\Omega w_\varepsilon\phi\,dx\Rightarrow w_\varepsilon=0$

$\forall\phi\in C_c^\infty(\Omega)$，记 $\phi_\varepsilon\triangleq\eta_\varepsilon*\phi$，$w_\varepsilon\triangleq\eta_\varepsilon*w$

$\because w\in L^1_{loc}\Rightarrow w_\varepsilon\overset{L^1_{loc}}{\longrightarrow}w$

$\Rightarrow w\overset{a.e.}{=}0$

#