中国科学技术大学数学科学学院

2024 ～ 2025 学年第 1 学期期末考试试卷

□A卷　　■B卷

课程名称	微分方程引论	课程编号	MATH3012
考试时间	2025年1月10日上午	考试形式	闭卷

姓 名 ________　学 号 ________　学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、(1). (15分) 用分离变量法求热传导方程的解.

$$
\begin{cases}
\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = (f(x)+1)e^{-t}, \ 0 < x < l, t > 0 \\
u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x) \ \ 0 \le x \le l, \\
u(0,t) = e^{-t}, \ \ u_x(l,t) = 0, \ \ t \ge 0
\end{cases}
$$

(2). (10分)证明这个方程的古典解是唯一的.

二、(15分)设$B^+(R) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 > 0, |x| < R\}$. 用格林函数法求边值问题

$$
\begin{cases}
\Delta u = f(x) \\
u|_{\partial B^+(R)} = g(x)
\end{cases}
$$

的解.

三、(15分) 设$\varphi(x)$是$\mathbb{R}^n$中具有紧支集的光滑函数. 考虑热方程初值问题

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta u + u = 0, \ x \in \mathbb{R}^n, t > 0; \\
u|_{t=0} = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}^n.
\end{cases}
$$

1. 用 Fourier 变换求解以上初值问题的解$u(x,t)$.

2. 是否存在正整数N及常数$c > 0$, 使得$\lim_{t\to+\infty} t^N |u(t,x)| = c$？

四、(10分)令$\Omega \subset \mathbb{R}^3$是有界开集. 设$u \in C^2(\Omega)$满足平均值性质，即对于任意的$B(x,r) \subset \Omega$, 有

$$
u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).
$$

证明: u是调和函数.

五、(15分)令$Q_T=(0,l)\times(0,T]$. 证明下面热传导方程

$$\begin{cases}\partial_t u-\partial_{xx}u-\frac{2}{l-x+1}\partial_x u-\frac{2}{(l-x+1)^2}u=0, & 0<x<l, t>0\\ u(x,0)=0, & 0\le x\le l\\ u(0,t)=0,\ (u_x+x)(l,t)=0, & t\ge 0\end{cases}$$

第二个边界条件应改为$(u_x+u)(l,t)=0$.

在$C^{1,2}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$中只有零解.

六、(15分)设$\varphi(x)$, $\psi(x)$是具有紧支集的光滑函数, u是波动方程

$$\begin{cases}\partial_{tt}u-\Delta u=0, x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}\\ u(x,0)=\varphi(x),\ \partial_t u(x,0)=\psi(x)\ x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

的解.

1. 求u的Fourier变换, 并由此证明: 存在常数$C>0$, 使得对于任意的区间$I\subset\mathbb{R}$,

$$\|\int_I u dt\|_{\dot{H}^2}\le C(\|\varphi\|_{\dot{H}^1}+\|\psi\|_{L^2}).$$

   其中$\|f\|_{\dot{H}^k}=\||\xi|^k\hat{f}(\xi)\|_{L^2}$

2. $\|f\|_{\dot{H}^k}(k=1,2)$有另一等价定义: $\|f\|_{\dot{H}^2}=\|\Delta u\|_{L^2}$, $\|f\|_{\dot{H}^1}=\|\nabla f\|_{L^2}$. 用能量估计证明上面的结论, 即

$$\|\int_I u dt\|_{\dot{H}^2}\le C(\|\varphi\|_{\dot{H}^1}+\|\psi\|_{L^2}).$$

3. 如果φ, ψ具有支集$E=\{x||x|\le R\}$, 那么E的决定区域和影响区域是什么?

(本题中你可以不加证明地使用积分与求导交换顺序或交换积分顺序.)

七、(15分)设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$是一个有界开集. $x_0\in\partial\Omega$. 如果$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega}\backslash\{x_0\})$满足

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega\backslash\{x_0\}}=g(x)\\ \lim_{x\to x_0}|u(x)|\le M_0\end{cases}$$

证明:

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\le\max\{M_0,\sup_{\partial\Omega\backslash\{x_0\}}|g(x)|\}.$$