中国科学技术大学数学科学学院

2024 ～ 2025 学年第 1 学期期末考试试卷

■A卷 □B卷

课程名称 微分方程引论 课程编号 MATH3012

考试时间 2025年1月10日上午 考试形式 闭卷

姓 名 ________ 学 号 ________ 学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									

一、(10分)求 $u(x,y)$:

$$\begin{cases} u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}=0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ u|_{y=0}=x,\ u_y|_{y=0}=2x. \end{cases}$$

二、 (15分) 设区域$D\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$有界, 证明: 波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2\Delta u=0, & x\in D, t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & x\in\overline{D} \\ \frac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma(x)\frac{\partial u}{\partial t}=g(x,t), & x\in\partial D, t\geqslant 0 \end{cases}$$

至多有一个经典解, 其中$\sigma(x)$为∂D上的非负函数.

三、(15分) 令$D=(0,4)\times(0,5)$, 设二元函数$\varphi(x,y)$光滑且满足$\varphi|_{\partial D}=0$.

证明：当$t\to+\infty$时, 热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t-(u_{xx}+u_{yy})=u,\ (x,y)\in D,\ t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ x\in\overline{D} \\ u|_{\partial D}=0 \end{cases}$$

的解$u(x,t)$在D中一致收敛于0.

四、(15分) 设$\varphi(x)$是$\mathbb{R}^n$中具有紧支集的光滑函数. 考虑热方程初值问题

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=u,\ x\in\mathbb{R}^n, t>0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

(1) 用 Fourier 变换求解以上初值问题的解$u(x,t)$.

(2) 若$\varphi(x)$的 Fourier 变换在球$B_R(0)$内取值为零, 证明: $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant e^{(1-R^2)t}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

五、(15分)

(1) 设函数u在$\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$调和，证明：若$u\in L^p(\mathbb{R}^n)(p\geqslant 1)$，即$\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^p dx<+\infty$，则$u\equiv 0$.

(2) 设$D\subset\mathbb{R}^n(n\geqslant 2)$为开区域，函数$u\in C(D)$是弱调和的，即对$D$中任意具有紧支集的光滑函数$\varphi$成立$\int_D u\Delta\varphi \mathrm{d}x=0$，证明：$u$在$D$中调和.

六、(12分)

令$B_r(0)$为$\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 3)$中以原点为中心、半径为$r>0$的球. 设非线性方程

$$-\Delta u+f(u,x)=0$$

在$B_{2r}(0)$内有非负解$u(x)$，其中函数$f\leq 0$连续. 证明：若u在$B_r(0)$内不恒为零，则在闭球$\overline{B_r(0)}$中恒成立$u>0$.

七、(12分) 令D为平面$\mathbb{R}^2$的单位圆盘，利用Green函数求以下边值问题的解$u(x,y)$：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\ (x,y)\in D,\\ u|_{\partial D\bigcap\{y\geq 0\}}=1+y,\ u|_{\partial D\bigcap\{y<0\}}=1-y^2. \end{cases}$$

八、(6分) 利用Cole-Hopf变换找到非线性方程$u_t+uu_x-u_{xx}=0$的一个非零解 $u(x,t)$.