微分方程引论 (赵)2024F 期中试题

尹宇辰　　吴昊峻　　梁儒彬　　王曹励文

日期：November 24, 2024

注意: 计算题只写结果不写过程, 不得分. 所有题目中使用的定理或命题均需证明.

题 1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{1+x}+y^2$ 的通解. 这个方程的零解是稳定的吗?

证明. 这是一个 Bernoulli 方程. 显然 $y\equiv 0$ 是一个特解. 当 y 不恒为 0 时, 根据该方程的计算办法, 在方程两边同时除以 y^2(5′) 并换元 $u=\frac{1}{y}$ 得到线性方程

$$u'-\frac{u}{x+1}+1=0.$$

解这个线性方程并换回原来的元, 得到

$$y(x)=\frac{1}{(1+x)(C-\ln(1+x))}.5'$$

零解的稳定性, 指的是初值为 0 的解的稳定性. 也即考虑初值不为 0 的解, 在无穷时间内的演化情况. 该方程的零解不稳定.(1′) 当 $C>0$ 时, 在 $x\to(e^c-1)^+$ 时爆破,(3′) 而当 $C<0$ 时解在 $\mathbb{R}^+$ 上趋于 0(1′). 从而该方程的解不稳定. □

评论. 本题考察 Bernoulli 方程的解法和稳定性概念.

1. 指出不稳定性的给 1 分. 若写任意的 c 都在有限时间内爆破的扣 1 分. 指出 $c>0$ 时才爆破而未指出 $c<0$ 不爆破的也得满分.
2. 写出解决 Bernoulli 方程的办法, 即方程两边同时除以 y^2 的即可得到 5 分.
3. 稳定性指的是无穷区间上的解的行为. 所以指出 $x\to -1^+$ 时爆破的不得分. 稳定性与某个 (系统演化的) 起始点及其初值有关系. 未指明初值的本次不扣分.
4. 有许多同学把 y 和 x 当成了自治系统的 y 和 x, 自己造了一个 t 出来. 这种 “办法” 不得分.

题 2. 求线性方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+\cos t,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+1.\end{cases}$$

的通解.

证明. 这是一个非齐次的线性方程组. 对应的齐次线性方程组是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\cdots\cdots 1'$$

系数矩阵 $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 的特征值为 $i,-i$, 对应的特征向量分别是 $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$.$\cdots\cdots 2'$

从而基解矩阵为 $\begin{pmatrix}e^{ix}&e^{-ix}\\ie^{ix}&-ie^{-ix}\end{pmatrix}$ 1′, 实化得 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-\sin t&\cos t\end{pmatrix}$.3’

根据常数变易法, 该非齐次方程的解形如 $\Phi(t)c(t)$(1’). 代入方程知 $c'(t)=\Phi^{-1}(t)f(t)$1’, 即

$$c(t)=\int_0^x\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t\\\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+\cos t-1\\\frac{1-\cos 2t}{4}+\sin t\end{pmatrix}.2'$$

从而该方程的特解为

$$\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s=\begin{pmatrix}\frac{t\cos t}{2}+\frac{\sin t}{2}-\cos t+1\\ -\frac{t\sin t}{2}+\sin t\end{pmatrix}.2'$$

通解为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s=\begin{pmatrix}\frac{t\cos t}{2}+\frac{\sin t}{2}-\cos t+1\\ -\frac{t\sin t}{2}+\sin t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\cdot \boldsymbol{c},2'$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是任意的常数列向量. □

评论. 本题考察线性方程组的解法和常数变易法的应用.

1. 常数变易不是常数变异.有没有变量遗传?
2. 未对基解矩阵实化的, 扣 2 分. 特解部分与本答案相差基解的某线性组合的得满分.
3. 直接注意到一个特解的, 除非面对随机给出的 5 个方程, 每个方程都能在 1 分钟内注意到特解, 否则不得分.
4. 有计算过程 (计算齐次方程的基解矩阵, 列出常数变易法或者特解的积分形式) 并且计算结果正确的, 即使过程不够完整也得满分. 若计算结果错误的, 按上面得分点判分.

题 3. 求微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=x\ln x$ 的通解.

证明. 令 $x=e^t$，则方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=te^t\cdots\cdots 3'.$$

计算特征方程:$\lambda^2-3\lambda+2=0 \implies \lambda_1=1,\lambda_2=2.\cdots\cdots 2'$

故它的齐次方程的通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{2t},c_1,c_2$ 为任意常数.$\cdots\cdots 2'$

- 经验解法: 令特解为 $\phi^*(x)=t(at+b)e^t, 4'$

  解得

  $$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}, \\ b=-1. \end{cases}\cdots\cdots 2'$$

  所以一个特解为 $\phi^*(x)=-t(\frac{1}{2}t+1)e^t$.

  原方程的通解为 $y=c_1e^t+c_2e^{2t}-t(\frac{1}{2}t+1)e^t$.

  化为关于 x 的式子:

  $$y=c_1x+c_2x^2-\frac{1}{2}x(\ln x)^2-x\ln x.\cdots\cdots 2'$$

- 常数变易法: 令 $y(x)=c_1(x)x+c_2(x)x^2.\cdots\cdots 2'$(用常数变易法即得两分)

  解出正确的 $c_1(x)=c_1-\frac{1}{2}(\ln x)^2,c_2(x)=c_2-\frac{1+\ln x}{x}.\cdots\cdots 4'$

  $$y=c_1x+c_2x^2-\frac{1}{2}x(\ln x)^2-x(\ln x+1).\cdots\cdots 2'$$

□

评论. 本题考察欧拉方程及其对应的非齐次方程解法.

1. 使用其他方法, 计算出齐次通解即可得 7 分, 算出最后解即得 15 分
2. 最后结果要化成关于 x 的式子, 占 2 分

题 4. 相图.

1. 作出方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2y+xy, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+y. \end{cases}$$

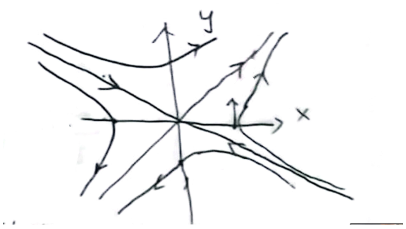
   的平衡点附近的相图.

2. 用零斜线法作出上述方程组在全平面的相图.(提示: 有可能比较耗时, 可以留到最后做)

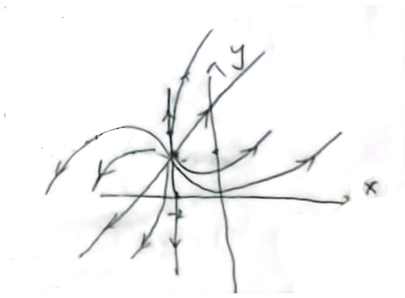
证明. 1. 先解平衡点: 考虑 $\begin{cases} 2y + xy = 0. \\ x + y = 0. \end{cases}$ 解得 $(x, y) = (-2, 2), (0, 0)$. 即平衡点为 $(-2, 2)$ 和 $(0, 0)$.($3'$.)

- 对于 $(0, 0)$, 对应的线性化系统为 $\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ 其系数矩阵的行列式为 $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 < 0$, 从而 $(0, 0)$ 是鞍点.($2'$.)
  因此, 它有两个特殊方向. 设特殊方向为 $y = kx$, 则 $k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+y}{2y} = \frac{1+k}{2k}$, 解得 $k_1 = 1(1'), k_2 = -\frac{1}{2}(1')$. 再注意到向量场 $\overrightarrow{f} = (2y, x + y)$ 在 $(1, 0)$ 处的取值为 $(0, 1)$, 可以作出如下的相图($2'$).
  由于 $xy = o(r), r \to 0$, 且 xy 在 $(0, 0)$ 的任意邻域内对 x, y 均连续可微, 故原系统在 $(0, 0)$ 附近的相图也类似.
- 对于 $(-2, 2)$, 令 $\begin{cases} \tilde{x} = x + 2, \\ \tilde{y} = y - 2 \end{cases}$, 则方程组化为 $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{x}(\tilde{y} + 2), \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} + \tilde{y}. \end{cases}$ 对应的线性化系统为 $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = 2\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} + \tilde{y}. \end{cases}$
  系数矩阵的行列式为 $D = 2$, 迹为 $T = 3$, 由于 $T^2 = 9 > 4D = 8$, 平衡点 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ 为双向结点. 设特征方向为 $y = kx$, 则 $k = \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}\tilde{x}} = \frac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2\tilde{x}} = \frac{1+k}{2}$, 解得 $k = 1$. 又当 $\tilde{x} = 0$ 时 $\dot{\tilde{x}} = 0$, 故 $\tilde{x} = 0$ 也是一个特殊方向. 再注意到向量场 $\overrightarrow{f} = (2\tilde{x}, \tilde{x} + \tilde{y})$ 在 $(0, 1)$ 处取 $(0, 1)$, 可以作出如下的相图.($6'$.)
  由于 $\tilde{x}\tilde{y} = o(\tilde{r}), \tilde{r} \to 0$, 且 $\tilde{x}\tilde{y}$ 在 $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ 附近的小邻域内对 x, y 连续可微, 故原系统在 $(-2, 2)$ 附近相图与线性化系统附近的相图类似.

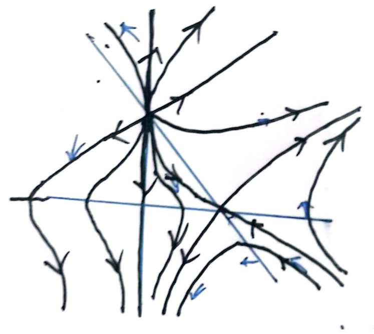
2. 相图如下.



(a) 1



(b) 1



(c) 2

□

评论. 本题考察绘制平面动力系统的相图, 操作较为固定.

- 第一问: 判断对了, 平衡点 3 分. 如果只是写了一个平衡点, 相图画对得六分 (因为没有明确平衡点定义), 相图类型两分, 特殊方向一个一分. 最后相图方向完全正确, 再得两分.
- 第二问 Nullcline 求对得 1 分, 全局箭头方向画出来/部分正确 3 分, 完全正确得 5 分

题 5. 讨论方程组

$$\begin{cases} x' = (\varepsilon x + 2y)(z + 1), \\ y' = (-x + \varepsilon y)(z + 1), \\ z' = -z^5 \end{cases}$$

的零解的稳定性.

证明. 首先尝试线性近似，近似后的方程是

$$\begin{cases}\dot{x}=\varepsilon x+2y\\ \dot{y}=-x+\varepsilon y\\ \dot{z}=0\end{cases}$$

对应矩阵的特征值是 $\varepsilon+\sqrt{2}i,\ \varepsilon-\sqrt{2}i,\ 0$.2' 于是如果 $\varepsilon>0$, 零解是不稳定的.4'

对于 $\varepsilon\leqslant 0$ 的情况, 线性近似就没用了. 于是考虑 Lyapunov 第二方法. 我们待定如下形式的的 Lyapunov 函数

$$V(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2,$$

取 $a,b,c>0$ 即可保证正定性. 下面计算

$$\begin{aligned}V^*(x,y,z)&=2ax(\varepsilon x+2y)(z+1)+2by(-x+\varepsilon y)(z+1)+2cz(-z^5)\\&=2a\varepsilon(z+1)x^2+2b\varepsilon(z+1)y^2-2cz^6+(4a-2b)xy(z+1).\end{aligned}$$

可见如果 $\varepsilon<0$, 并且取 $4a=2b$, 就使得 V^* 在 0 的空心邻域 $\{z>-1\}-\{0\}$ 内小于 0.3' 于是零解是渐近稳定的.2'

最后对于 $\varepsilon=0$ 的情况, 同上构造 $b=2a, c>0$ 的 Lyapunov 函数2'零解是稳定的2'

判断零解是否渐近稳定(不占分数)

我们要单独处理. 重写方程如下

$$\begin{cases}\dot{x}=2y(z+1)\\ \dot{y}=-x(z+1)\\ \dot{z}=-z^5\end{cases}$$

于是考虑如下的函数

$$V(x,y,z)=x^2+2y^2.$$

虽然它不满足在 0 附近正定, 但也没关系, 因为

$$V^*(x,y,z)=2x\cdot 2y(z+1)+4y\cdot(-x(z+1))=0,$$

所以从任意 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 出发的解都不会趋于 0, 从而此时零解不是渐近稳定的. □

评论. 本题是课上例题的原题. 考察自治系统的稳定性判断.

1. $\varepsilon>0,\varepsilon=0,\varepsilon<0$ 情况各 4,5,4 分. 特征值求出 2 分. $\varepsilon=0$ 情况下, 构造函数 2 分. 构造函数正确时, 结论正确 2 分. $\varepsilon<0$ 情况下, 构造函数 3 分. 构造函数正确时, 结论正确 2 分.
2. 没有求出特征值, 但是在证明 $\varepsilon>0$ 不稳定时指出特征值也可得两分.
3. 有同学先解出 $z=\operatorname{sgn}(z_0)(\frac{1}{4t+\frac{1}{z_0^4}})^{\frac{1}{4}}, z_0\neq 0$, 再对二维系统 x,y 讨论稳定性, 不得分. 这样做虽然可以做出同样的答案, 但是过程均完全错误. 原因在于二维系统的线性化方程不再是原来的三维时的线性化方程, 新的线性化方程是

$$\begin{cases}\dot{x}=(\varepsilon x+2y)(\operatorname{sgn}(z_0)(\dfrac{1}{4t+\frac{1}{z_0^4}})^{\frac{1}{4}}+1)\\ \dot{y}=(-x+\varepsilon y)(\operatorname{sgn}(z_0)(\dfrac{1}{4t+\frac{1}{z_0^4}})^{\frac{1}{4}}+1)\end{cases}$$

   这是一个非常数系数矩阵, 书本定理不能判断它的稳定性.
4. 判断 $\varepsilon\leq 0$ 稳定性时, 直接说明 $\varepsilon=0$ 稳定或者 $\varepsilon<0$ 渐进稳定不得分.
5. 讨论 $\varepsilon=0$ 稳定性时, 构造的 Lyapunov 函数不是正定的或者 V^* 不恒小于等于 0, 本情况至多得 2 分.
6. 讨论 $\varepsilon<0$ 稳定性时, 构造的 Lyapunov 函数不是正定的或者 V^* 不是负定的, 本情况至多得 2 分.

题 6. 设 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}$. 若 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且 $\displaystyle\int_0^{\infty}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}(s))\,\mathrm{d}s=+\infty$, 证明: 该方程组至少存在一个解在 $[0,+\infty)$ 上无界.

证明. 设方程组的 n 个线性无关解为 $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. 由 Liouville 公式:

$$W(x) = \det(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)) = W(0)\exp(\int_0^x \mathrm{tr}A(s)\,\mathrm{d}s) \cdots\cdots 3'$$

其中 $W(0) \neq 0$.(1')

反证法. 若方程组所有解在 $[0, +\infty)$ 上均有界, 那么 $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上均有界, 从而 $W(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上也有界 (3')

但当 $x \to +\infty$ 时，$|W(x)| = |W(0)|\exp(\int_0^x \mathrm{tr}A(s)\,\mathrm{d}s) \to +\infty$(3'), 这与 $W(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界矛盾! □

评论. 没有写出 Liouvile 公式, 其他得分点不得分.

题 7. 设 $\theta(x)$ 满足方程

$$\begin{cases} \theta'(x) = \dfrac{1}{2} + x^2 - 2x\sin^2\theta(x), x \in [0, 1], \\ \theta(0) = 1. \end{cases}$$

证明: 对于任意的 $x \in [0, 1], \theta(x) > 0$.

证明. 反证法. 若存在 $x_1 \in [0, 1]$ 使得 $\theta'(x_1) \leqslant 0$.

- 若 $\theta(x_1) = 0$, 则 $\theta'(x_1) > 0$. 此时, 如果任意的 $t \in (0, x_1)$ 均有 $\theta(t) \geqslant 0$, 则由导数定义知 $\theta'(x_1) \leqslant 0$, 矛盾. 故存在 $x_2 \in [0, 1]$ 使得 $\theta(x_2) < 0$. 从而约化为下一种情况:
- 若 $\theta(x_2) < 0$, 考虑集合 $\{y \in [0, x_2) \colon \theta(y) \geqslant 0.\}$. 由介值定理及初值条件, 该集合非空, 从而由确界定理知其有最小上界 $x_3 = \sup\{y \in [0, x_2) \colon \theta(y) \geqslant 0.\}$. 则 $\theta(x_3) = 0$ 且任意的 $y \in (x_3, x_2)$, 有 $\theta(y) < 0$. 从而 $\theta'(x_3) \leqslant 0$, 矛盾!

两种情况均不成立, 故 $\theta(x) > 0$ 恒成立. □

评论. 本题方法极多. 以上解答只是给出一个示例.

- 若使用了数学分析做法且没有明确最小点的取法和导数为什么小于等于 0 得到矛盾, 得 10 分;
- 若用比较定理, 没有明确到底和谁比较/忘记使用比较定理 10 分; 比较的对象错误 5 分, 有大概四种正确的比较.

题 8. 设 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数, 且对 y 满足 Lipschitz 条件, 也即存在 $L > 0$ 使得对于任意的 $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, 都有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|.$$

证明: 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)\sin(2x), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

的解 $y(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上存在.

证明. (Picard 迭代 + 解的拼接)

设 $g(x, y) = f(x, y)\sin(2x)$, 则 $g(x, y)$ 也对 y 满足一致 Lipschitz 条件. 从而由 Picard 存在唯一性定理 (或 Peano 存在性定理) 知该初值问题在局部存在解.$2'$.

由 $g(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$ 和延伸定理知 $g(x, y)$ 可以延伸到 $\mathbb{R}^2$ 的边界.$2'$.

断言: 在任意闭区间 $[-M, M]$ 上, 该初值问题存在解.考虑 Picard 序列:$y_0 = 0, y_1(x) = \int_0^x f(s, 0)\sin(2s)\,\mathrm{d}s$,

$$y_{n+1}(s) = \int_0^x f(s, y_n(s))\sin(2s)\,\mathrm{d}s,$$

由于 $f\in C(\mathbb{R}^2)$, 这定义是合理的. 记 $M'=\max_{0\leqslant x\leqslant M}|f(x,0)|$, 有

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1}(x)-y_n(x)| &\leqslant \int_0^x |f(s,y_n(s))-f(s,y_{n-1}(s))|\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant L\int_0^x |y_n(s)-y_{n-1}(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant L^n\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}}|y_1(x_n)|\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\mathrm{d}x \leqslant \frac{M'L^n}{n!},
\end{aligned}
$$

从而 $|y_{n+1}(x)|\leqslant\sum_{i=1}^n|y_{i+1}(x)-y_i(x)|+|y_1(x)|\leqslant M'(1+e^L)$, 根据 Weierstrass 判别法,$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $[0,M]$ 上一致收敛. 可以验证该收敛函数就是原方程的解. 从而方程在 $[-M,M]$ 上存在解, 记为 $y_0(x)$.6′

断言: 上述解可以延伸到 $\mathbb{R}$.对初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\sin(2x),\\
y(M)=y_0(M).
\end{cases}
$$

根据 Picard 存在唯一性定理知该方程存在唯一解. 重复上述过程知这个解可以延伸到 $[M,2M]$ 上. 由局部唯一性, 这个解与上一步的解可以拼接, 从而得到一个 $[0,2M]$ 上的解. 对 $kM,k\in\mathbb{Z}$ 重复这个过程可以得到一个 $\mathbb{R}$ 上的解. 于是原初值问题在 $\mathbb{R}$ 上存在解.5′ □

证明. (延伸定理)

局部存在性和唯一性同上一题.4’

由于 $g(x,y)=f(x,y)\sin(2x)$ 也是全局 Lipschitz 的,

$$|g(x,y)|\leqslant L|y|+|g(x,0)|.4'$$

设某一解的存在区间仅为有限的 (a,b), 对 $(a-1,b+1)$ 应用定理0.1

定理 0.1. *考虑微分方程*

$$y'=f(x,y), \tag{1}$$

其中函数 $f(x,y)$ 在条形区域

$$D\colon a<x<b,-\infty<y<+\infty$$

内连续, 并且满足

$$|f(x,y)|\leqslant A(x)|y|+B(x),$$

这里 $A(x)\geqslant 0,B(x)\geqslant 0$ 在 (a,b) 上连续, 则方程1的解在 (a,b) 上存在.

取 $A(x)=L,B(x)=|f(x,0)|$,7′得该方程的所有解在 $(a-1,b+1)$ 上存在, 与前述假设矛盾. 故存在 $\mathbb{R}$ 上的解. □

评论. 本题考察解的存在区间的论述. 要说明解的存在区间, 要么通过构造, 要么通过控制. 这就是两种做法的来源.

1. 任意的 $M>0$, 在区间上 $[-M,M]$ 上存在解, 不能推出存在一个 $\mathbb{R}$ 上的解. 因为每个 $[-M,M]$ 上造出来的解可能不同.做到这里得 10 分. 一个正确的书写办法应该是假设存在区间有限, 再用反证法说明这不可能. 只默写了 Picard 存在唯一性定理证明的得 2 分. 定理默写错误的不得分. 延伸定理应对 $\mathbb{R}^2$ 使用. 对小矩形使用延伸定理的不得分. 只报定理名字而不说明内容的, 只报定理名字而把结论说错的均不得分.
2. 可以利用比较定理,$-1-|f(x,y)|<|f(x,y)\sin(2x)|<|f(x,y)|+1$ 从而考虑方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=|f(x,y)|+1,\\ y(0)=0.\end{cases}$ 和方程 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-|f(x,y)|-1,\\ y(0)=0.\end{cases}$. 用这两个方程的解控制原方程组. 请注意第一比较定理和第二比较定理的应用. 第一比较定理的方程右侧不等式是严格的, 从而两个方程组的任意解可以比较; 第二比

较定理的方程右侧不等式不严格, 此时比较对象中有一个方程的解要限制为最大 (最小解).比较定理用错者不得分. 右端采用线性函数控制的, 控制函数写错 (基本上是 $f(x,0)$ 写成 $f(0,0)$) 的不得分. 若考虑第二比较定理而未写清楚唯一性的不得分.

3. 可以用定理0.1的证明思路, 设存在区间有限, 设 $(*,\beta)$, 在充分接近 β 的地方考虑 Picard. 具体地说, 若解 $\varphi(x)$ 的存在区间有限, 设为 $(*,x_0)$, 取 $x_1=x_0-\frac{1}{4L}, h=\frac{1}{2L}$, 在 $[x_1-h,x_1+h]$ 处 $f(x,\varphi(x_1))$ 的最大值为 M, 此时 $|y-y_0|\leqslant b$ 中有 $|f(x,y)|\leqslant|f(x,y)-f(x,\varphi(x_0))|+|f(x,\varphi(x_0))|\leqslant bL+M$, 要取充分大的 b 使得 $h\leqslant\frac{b}{bL+M}\leqslant\frac{b}{M'}, M'=\max\limits_{(x,y)\in D}|f(x,y)|, D=\{(x,y)\colon|x-x_0|\leqslant h,|y-y_0|\leqslant b\}$. 根据 Picard 存在唯一性定理知该方程可以延拓到 $[x_1-h,x_1+h]$ 处, 而 $x_1+h=x_0+\frac{1}{4L}>x_0$, 与存在区间有限矛盾.采用此办法的, 意识流叙述手段, 即没有写出 h,b,M, 只是写 "充分大""充分小""靠近" 等词语, 均不得分.
4. 弱化命题者 (如考虑 $f(x,y)$ 有界的) 或采用与上述解法均不相同的, 未证明成功者不得分.有异议者需提交以弱化命题或其他证法为前提的完整证明过程, 即, 删去该弱化命题或作答的部分证明可使证明过程不成立的完整解答.

题 9. 令 $f(t,x,y)$ 在 $[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上连续可微. 已知 $\varphi(t)$ 是二阶微分方程

$$x''=f(t,x,x') \tag{2}$$

在 $[0,1]$ 上的解,$\varphi(0)=a,\varphi(1)=b$.

1. 设 $\varphi'(0)=\alpha_0$, 证明: 若 $|\alpha-\alpha_0|$ 充分小, 令 $\theta=\theta(t,\alpha)$ 是以 $\theta(0,\alpha)=a,\theta'(0,\alpha)=\alpha$ 为初值的2的解, 则 $\theta(t,\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上存在.
2. 定义 $u(t)=\dfrac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,\alpha_0)$, 求 u 所满足的微分方程及初值 $u(0),u'(0)$.
3. 假设对于所有的 $t\in[0,1]$ 及 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 都有 $\dfrac{\partial f}{\partial x}>0$. 证明:$u'\geqslant 0$.
4. 证明: 若 $|\beta-b|$ 充分小, 则存在 $x''=f(t,x,x')$ 的解 ψ, 使得 $\psi(0)=\alpha,\psi(1)=\beta$.(提示: 只要证明给定 β, 可以用隐函数定理说明由 $\theta(1,\alpha)=\beta$ 可解出 $\alpha=\alpha(\beta)$.)

证明. 答案来自赵老师.

1. 由解对初值的连续依赖性, 已知 $\varphi(t)$ 是解, 且 $\varphi(0)=a,\varphi'(0)=\alpha_0$, 而 $\theta(t)$ 是2以 $\theta(0)=a,\theta'(0)=\alpha$ 且 $|\alpha-\alpha_0|$ 充分小的解. 故 $\theta(t)$ 也在 $[0,1]$ 上存在.
2. 由

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta(t,\alpha)=f(t,\theta(t,\alpha),\theta'(t,\alpha)) \tag{3}$$

和 $f\in C^1([0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, 根据解对初值的连续可微性,$\theta(t,\alpha)$ 关于 α 可微. 对3两边同时关于 α 求导, 得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,\alpha)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\theta(t,\alpha),\theta'(t,\alpha))\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,\alpha)+\frac{\partial f}{\partial y}(t,\theta(t,\alpha),\theta'(t,\alpha))\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,\alpha). \tag{4}$$

由 $f(t,x,y)$ 可微, 从而是局部 Lipschitz 的. 因此,2的初值问题的解是唯一的. 故当 $\alpha=\alpha_0$ 时,$\theta(t,\alpha)=\varphi(t)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t,\alpha)=\varphi'(t)$. 因此, 在4中, 令 $\alpha=\alpha_0$, 得

$$\begin{cases}u''(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t),\varphi'(t))u(t)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t))u'(t),\\ u(0)=0,u'(0)=1.\end{cases} \tag{5}$$

3. 由于 $u(0)=0,u'(0)=1$ 知存在 $\overline{x}>0$,s.t. 在 $(0,\overline{x}]$ 上 $u>0$. 下证任意的 $t\in(0,1]$ 都有 $u(t)>0$.否则存在 $t_1\leqslant 1$ 使得任意的 $0<t<t_1$ 都有 $u(t)>0$ 但 $u(t_1)=0$. 令 $v(t)=u'(t)$, 则

$$v'(t)-\frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t))v(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi(t),\varphi'(t))u(t).$$

这是一个一阶线性方程. 可以解得

$$v(t)=\int_0^t e^*\frac{\partial f}{\partial x}u(s)\,\mathrm{d}s.$$

故 $v(t)=u'(t)>0, \forall t\in[0,t_1]$. 从而

$$u(t_1)=\int_0^{t_1} u'(s)\,\mathrm{d}s>0,$$

矛盾. 再利用公式可得 $v(t)>0, \forall t\in[0,1]$. 特别地,$u(1)=\theta(1,\alpha_0)>0$.

4. 令 $F(\alpha,\beta)=\theta(1,\alpha)-\beta$, 则 $F(\alpha_0,b)=0$. 由隐函数定理, 只要证明 $F'_\alpha(1,\alpha_0)>0$, 此时任意的 $|\beta-b|$ 充分小, 都存在 $\alpha=\alpha(\beta)$ 使得 $\theta(1,\alpha)=\beta$. 而 $F'_\alpha(1,\alpha_0)=u(1,\alpha_0)>0$. 令 θ 是 $\begin{cases}x''=f(t,x,x'),\\ x(0)=\alpha, x'(0)=\alpha(\beta)\end{cases}$ 的解, 则 $\theta(1)=\beta$.

□

评论. 本题较为综合. 其中技巧多为 S-L 边值问题的证明过程中所见.

1. 指出连续依赖性即可得 5 分, 未指出连续依赖仅说明 f 连续不得分, 误用解对初值的连续可微性不得分。事实上本题实际应用的为课本定理 4.5。
2. 未指出由于解对初值的可微性从而可求导不扣分，实际应当写明; 仅方程形式写对得 7 分, 方程形式写对且初值正确得 8 分, 指出由于解的唯一性从而在 $\alpha=\alpha_0$ 时 θ 即为 ϕ 得 10 分。
3. 方法与参考解答类似, 但实际证明过程出现漏洞得 5 分, 第二问中方程写错但第三问方法可直接照搬至正确方程酌情扣分。使用其他方法但有严重错误不得分。
4. 未明确指出由于 u 在初值处导数严格大于 0 从而 $u(1,\alpha_0)>0$ 得 2 分。