中国科学技术大学
2024年秋季学期微分方程引论期中试卷

姓名：______________ 学号：______________

注意:计算题只写结果不写过程，不给分. 所有题目中使用的定理或者命题需要注明.

1. (15分)求微分方程$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{1+x} + y^2$的通解. 这个方程的零解是稳定的吗?

2. (15分)求线性方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + \cos t \\ \frac{dy}{dt} = -x + 1 \end{cases}$$

的通解.

3. (15分)求微分方程$x^2y'' - 2xy' + 2y = x\ln x$的通解.

4. (a) (15分)做出方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y + xy \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

的平衡点附近的相图.

(b) (5分)用零斜线法做出上述方程组在全平面的相图. (提示：有可能比较耗时，可以留到最后做)

5. (15分)讨论方程组

$$\begin{cases} x' = (\epsilon x + 2y)(z+1) \\ y' = (-x + \epsilon y)(z+1) \\ z' = -z^5 \end{cases}$$

的零解的稳定性.

6. (10分)设$\frac{dx}{dt} = A(t)x$. 如果$A(t)$在$[0,\infty)$上连续且$\int_0^\infty \mathrm{tr}(A(s))ds = +\infty$, 证明：该方程组至少有一个解在$[0,\infty)$上无界.

7. (15分)设$\theta(x)$满足方程

$$\begin{cases} \theta'(x) = \frac{1}{2} + x^2 - 2x\sin^2\theta(x),\ x \in [0,1] \\ \theta(0) = 1 \end{cases}$$

证明：对于任意的$x \in [0,1]$, $\theta(x) > 0$.

8. (15分)设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的连续函数，并且对y满足李普希兹条件, 即存在$L>0$使得对于任意的y_1, $y_2\in\mathbb{R}$,

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|.$$

证明：初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\sin(2x),\\ y(0)=0\end{cases}$$

的解$y(x)$在$(-\infty,+\infty)$上存在.

9. 令$f(t,x,y)$在$[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$上连续可微. 已知$\varphi(t)$是二阶微分方程

$$x''=f(t,x,x') \tag{E}$$

在$[0,1]$上的解, $\varphi(0)=a$, $\varphi(1)=b$.

(a) (5分)设$\varphi'(0)=\alpha_0$, 证明: 如果$|\alpha-\alpha_0|$充分小, 令θ(看作是t,α的函数)是以$\theta(0,\alpha)=a$, $\theta'(0,\alpha)=\alpha$为初值的(E)的解, 那么$\theta(t,\alpha)$在$[0,1]$上存在.

(b) (10分)定义$u(t)=\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}(t,\alpha_0)$, 求 u 所满足的微分方程及初值$u(0)$, $u'(0)$.

(c) (10分)假设对于所有的$t\in[0,1]$及 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}>0$. 证明: $u'\ge0$.

(d) (5分)证明：如果$|\beta-b|$充分小, 那么存在$x''=f(t,x,x')$的解ψ, 使得$\psi(0)=\alpha$, $\psi(1)=\beta$. (提示：只要证明给定β, 可以用隐函数定理说明由$\theta(1,a)=\beta$可解出$a=a(\beta)$.)

(提醒：每一小问都可以用前面题目的结论，即使你无法证明. 注意区分a与α)