微分方程概论 2024 期末回忆版

一．求解下列微分方程

1. $x\frac{dy}{dx}=y-x\tan\frac{y}{x}$

解：看到 $\tan\frac{y}{x}$ 自然想到作换元 $z=\frac{y}{x}$

并注意到 $\frac{dy}{dx}\Rightarrow x=0$ 不是解

两边除 $x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\tan\frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(xz)}{dx}=x\frac{dz}{dx}+z.$$

$\Rightarrow x\frac{dz}{dx}=-\tan z$ 为变量分离方程

$$\Rightarrow \ln|\sin z|+\ln|x|+c=0$$

代入$z=\frac{y}{x}$ 并取 e 指数有通解 $x\sin\frac{y}{x}=C'$

2. $y''+2y'+y=e^{-x}$

解：这是高阶常系数线性方程，先求齐次通解

特征方程：$\lambda^2+2\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-1$（二重）

齐次通解：$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$

对非齐次特解作待定系数 $\varphi(x)=ax^2e^{-x}$（注意-1 是特征方程的二重根）

代入方程有 $a=\frac{1}{2}$ 。

$\Rightarrow$ 通解：$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+\frac{x^2e^{-x}}{2}$

3． $\sqrt{x}\frac{dz}{dx}+\sqrt{y}\frac{dz}{dy}=z$

初值条件：$y=1$ 时，$z=\sin\pi x$

解：本题为 11.2 例 1 变式

$$\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{z}$$

有独立首次积分：（需要用行列式检验独立性，在此不赘述）

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=c_1 \\ 2\sqrt{y}-\ln|z|=c_2 \end{cases}$$

隐式通解：$\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},2\sqrt{y}-\ln|z|)=0$

$\Rightarrow z=\exp(2\sqrt{y})\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

其中Φ，φ 为任意 C1 函数

代入初值 $\sin\pi x=e^2\cdot\varphi(\sqrt{x}-1)$.

令 $\mathrm{k}=\sqrt{x}-1$，那么 $\mathrm{x}=(1+\mathrm{k})^2$

$\varphi(\mathrm{k})=e^{-2}\sin(\pi(1+\mathrm{k})^2)$

$\Rightarrow z=e^{2\sqrt{y}-2}\sin\left(\pi(1+\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\right)$

4. 此题我记不太清了，是分组求积分因子，有一个部分是

$$\frac{1}{x}dx-2\frac{1}{y}dy=d(\ln|x|-2\ln|y|)$$

注意到$e^{\ln|x|-2\ln|y|}=\frac{x}{y^2}$即可凑出来整体的积分因子为$\frac{1}{x^2y}$，之后再用求

势函数的方法求通解即可，注意用积分因子可能会丢掉特解

给出一个相似的题目（来源：23 年第二次习题课讲义）

求解$y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$

分组为$(y^3dx-2xy^2)dy+2x^2dy=0$

第一组积分因子为 y^{-5} ，通积分为 $\frac{x}{y^2}=c$

第二组积分因子为 x^{-2} ，通积分为 $2y=c$

取 $g_1(t)=t^{-2},g_2(t)=2t^{-1}$ ，有 $y^{-5}g_1\left(\frac{x}{y^2}\right)=x^{-2}g_2(2y)$ ，从而 $\mu=x^{-2}y^{-1}$

同乘 μ 化简有 $\ln y^2-\frac{y^2}{x}=c$. 且 $y=0,x=0$ 为特解.

二．求一个隐式方程$y=f(x,p)$的通解和特解并画出其图像

两边对 x 求导即可，可以写成因式分解的形式

三.　　解三阶常系数方程组（含复数特征值）

四.

1. 画出$\ddot{\theta}=5\sin\pi\theta$的相图

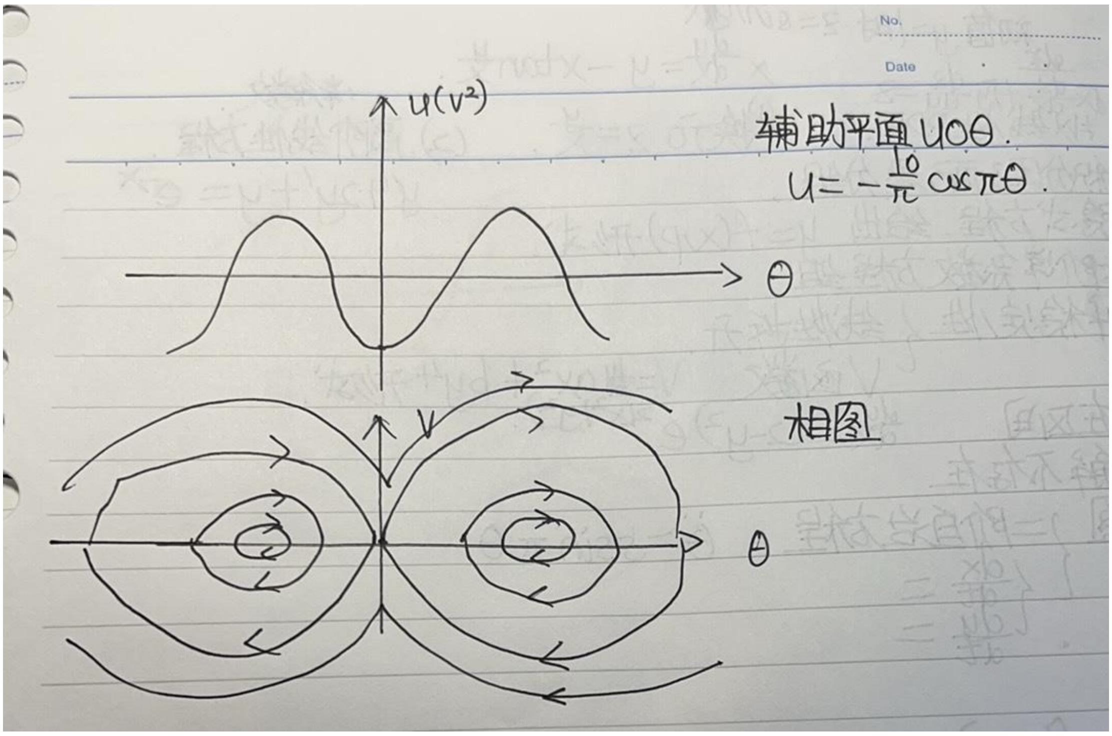
解：这是二阶自治方程，作图请参考 5.1 节做法

令 $v=\frac{d\theta}{dt}\quad \ddot{\theta}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=v\cdot\frac{dv}{d\theta}$

$$v\cdot\frac{dv}{d\theta}=5\sin\pi\theta$$

$$\Rightarrow v^2 = -\frac{10}{\pi}\cos(\pi\theta) + C_1.$$

相图类似下图（有点丑）



2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(2y-1) \\ \frac{dy}{dt} = y(3-4x) \end{cases}$

求此方程的一个在第一象限内的首次积分，并画出方程的相图

解：23 年也考了这个方程

首次积分只需要将两式相除即可获得分离变量方程，注意题目要求在第一象限内

首次积分为 $2y - \ln y - 3\ln x + 4x = c$

另外注意题目实际上已经给出了$\frac{d\binom{x}{y}}{dt}=f(x,y)$的显式表达了，可以做出相图

注：此题是洛特卡-沃尔泰拉的捕食者-猎物模型的一种情况

五．判断下列方程解的稳定性

1. 给出了$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\text{两个一次项}+\text{三个高次项}\\ \frac{dy}{dt}=\text{两个一次项}+\text{两个高次项}\end{cases}$

解：注意到两个方程所含的项的个数并不相同，常规的李雅普诺夫函数无法用待定系数法凑出来，我们考虑线性近似，注意验证书上 8.2.2 给出的前提条件，发现满足要求，求一个二阶方阵的特征值即可

2. 给出了$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\text{三项}\\ \frac{dy}{dt}=\text{三项}\end{cases}$

解：上下两个方程项数相等，仔细观察具体次方的不同，发现需要用$V=ax^2+by^4$来待定系数，求出 a，b 即可

注：一般情况下我们取 V 的时候各取 x 的一个偶数次方和 y 的一个偶数次方待定系数

六.

对下列方程的任意一个解，给出他的最大存在区间

$$\frac{dy}{dx} = (2 - y^2)e^{2(x^2+y^2)}$$

解：仿照23年第三次习题课讲义的这道题即可

求证：初值问题

$$\frac{dy}{dx} = (y - 2y - 3)e^{(x+y)^2}, y(x_0) = y_0$$

的解的存在区间为 (a, b) ，则 $a =- \infty$或$b =+ \infty$ 至少存在一个.

Proof. 注意到

$$(y^2 - 2y - 3)e^{(x+y)^2} = (y - 3)(y + 1)e^{(x+y)^2}$$

满足解的唯一性条件，且

（1）$y = 3$ 与 $y \equiv - 1$ 是两解

（2）$-1 < y_0 < 3$ 时，解水远在 $-1 < y < 3$ 之间

（3）$y_0 > 3$ 时，此时解必满足 $y > 3$ 成立（ $y \equiv 3$ 为一解且过一点的解唯一），此时 $f(x, y) > 0$ 恒成立，解向左延伸能延伸至负无穷。

（4）$y_0 <- 1$ 时，同理，$f(x, y) > 0$ 会恒成立，向右延伸又不能越过 $y =- 1$ ．此时 $b =+ \infty$ 。

对本题来说，虽然没有给出初值条件，但我们可以把通解中的常数C看作“初值”来用相同的方法分析

七．（本题 6 分）

方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

满足

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\neq(0,0)\\0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

并且有解 $y=\varphi(x)$ 使得 $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$

求证：初值问题$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ ； $y(0)=0$ 无解